MATEMATICAS ESPECIALES

2.ª Edición

Emilio Bujalance · José A. Bujalance · Antonio F. Costa
Arturo Fernández · Víctor Fernández · Jesús Fernández
Pedro Jiménez · José L. Rubio · Ernesto Martínez

SANZ Y TORRES

SEGUNDA EDICIÓN

Matemáticas Especiales

Emilio Bujalance José A. Bujalance Antonio F. Costa
Arturo Fernández Víctor Femández Jesús Femández
Pedro Jiménez José L. de María Emesto Martínez
U.N.E.D.

SANZ Y TORRES

Prólogo

Este libro tiene por objeto introducir al lector, de una manera rápida, en los conceptos básicos de la matemática superior. Está dirigido fundamentalmente a los alumnos del Curso de Acceso de la Universidad Nacional de Educación a Distancia y también, a todos los estudiantes de grado medio que pretendan cursar una licenciatura de Ciencias, Ingeniería o Económicas.

Por razones de carácter didáctico, se ha dado un tratamiento elemental a los distintos temas evitando entrar, en la mayoría de las ocasiones, en demostraciones que podrían resultar difíciles para el alumno en su primera toma de contacto con la teoría.

También se exponen numerosos ejemplos con el fin de aclarar conceptos y de iniciar al estudiante en las técnicas de cálculo. Para afianzarse en estas técnicas, el alumno debe desarrollar detalladamente todos los ejemplos y resolver los ejercicios propuestos en cada tema. El libro "Problemas de Matemáticas Especiales", de esta misma Editorial, le será de gran ayuda para esta tarea.

Los Autores

Indice General

1. Números enteros y racionales, 1
2. Números reales, 15
3. Elementos de la teoría de conjuntos, 39
4. Combinatoria, 63
5. Probabilidad, 97
6. Estadística descriptiva, 115
7. Sistemas de ecuaciones lineales, 133
8. Matrices y determinantes, 153
9. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices, 185
10. Elementos de geometría, 217
11. Trigonometría, 237
12. Introducción a la geometría analítica, 255
13. Vectores del plano, 267
14. Los números complejos, 293
15. Vectores del espacio, 315
16. Geometría analítica del plano, 333

17. Geometría analítica del espacio, 361
18. Sucesiones, 391
19. Cálculo de límites de sucesiones, 403
20. Funciones, 415
21. Polinomios, 429
22. Límites de funciones, 449
23. Funciones continuas, 465
24. Funciones derivables, 477
25. Estudio y representación de funciones, 493
26. Funciones trigonométricas, 519
27. Funciones logarítmicas y exponenciales, 541
28. Primitivas de una función, 563
29. Cálculo de primitivas, 579
30. La integral definida, 595

Indice de términos, 617
Indice de símbolos, 623

TEMA 1

Números enteros y racionales

La idea de número surge como resultado de comparar una cantidad con otra, es decir, como consecuencia de medir una cantidad, puesto que medir una cantidad es compararla con otra a la que llamamos unidad. Agregando unidades formamos cantidades que representamos por números.

El objeto de este primer tema es introducir al alumno en algunos resultados básicos de los números enteros y racionales. Se comienza con las operaciones básicas de los números enteros, para seguir con el máximo común divisor y mínimo común múltiplo, se establecen después, los números racionales que surgen de forma natural como cocientes de números enteros, y en ellos se estudian sus operaciones básicas, así como la expresión decimal de un número racional.

1.1 Números enteros

Los números naturales (también llamados enteros positivos) son los números de contar 1, 2, 3, 4, 5,.... El número 2 surge al agregar una unidad al número 1, el número 3 surge al añadir una unidad al número 2 y así sucesivamente. El conjunto de números naturales se designa por la letra **N**:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Los números enteros son el conjunto formado por los números naturales, sus negativos (también llamados enteros negativos) y el 0. El conjunto de los números enteros se designa por **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Obsérvese que el número 0 no se considera un número natural. El conjunto de los números enteros no negativos será designado por $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Notas Históricas

El origen del concepto de número es extremadamente difícil de descubrir, hasta el punto de que se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación. Es una idea muy extendida la que supone que el concepto de número está estrechamente unido al de tiempo, dependiendo ambos de una impresión que despierta en nosotros la sucesión de fenómenos que se verifican a nuestro alrededor y en nosotros mismos. Kant (1724-1804) entre los filósofos, y Hamilton (1805-1865), entre los matemáticos, son los representates de esta interpretación. Otros, en cambio, opinan que el número tiene más que ver con el concepto de espacio, reduciendo el concepto de número a la simultánea contemplación de diferentes objetos considerados en su conjunto. Por último, hay quienes ven en las representaciones de los números la expresión de una especial aptitud del espíritu, la cual es independiente de toda intuición de espacio y tiempo; un representante de esta interpretación es Minkowski (1864- 1909).

La historia de los números negativos muestra que los antiguos griegos no tuvieron noción de ellos; de modo que, en este punto, no se les puede asignar el primer lugar, como muchos hacen. Por el contrario, puede asegurarse que sus descubridores son los indios, a quienes también se deben el cero y el sistema de numeración decimal. En Europa empezaron a usarse en la época del Renacimiento, siendo su introducción muy lenta, aunque ya Vieta en su memoria "In artem analyticam isagoge", la utilizó completamente.

Felix Klein (1849- 1923)

- Sean a y b dos números enteros. A partir de las operaciones suma y producto, a + b y a b (ó a.b) es fácil definir otras operaciones llamadas diferencia (también resta o sustracción) y división.

Llamaremos *diferencia* a - b de estos dos enteros a otro entero d que satisfaga la igualdad a = b + d; así si a = 7 y b= 5, a - b = 2 ya que 7 = 5 + 2.

Si a ≠ 0 y b = a.q para algún q, diremos que *a divide a b*. Otras expresiones equivalentes son *a es un divisor de b*, *a es un factor de b*, *b es múltiplo de a*. Si a divide a b, escribiremos a | b. Así - 3 divide a 12 puesto que 12 = (- 3). (- 4), y 6 no divide a 21 puesto que no existe ningún entero q tal que 6.q = 21.

Si un número a es múltiplo de 2 diremos que es *par*. Si un número no es par diremos que es *impar*.

Diremos que $b > a$ si existe un número natural n tal que b = a + n. Diremos que $b \geq a$ si b > a ó b = a. Así $8 > 5$ ya que $8 = 5 + 3$.

- El siguiente cuadro nos establece los criterios de divisibilidad de un número entero por 2, 3, 5 ó 7. Sea $a = a_k a_{k-1} \ldots a_0$ un número natural, en donde a_i expresa el dígito que aparece en el lugar i + 1 en el número a, por ejemplo si a = 78934, entonces $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 7$.

a es divisible por 2	si y sólo si	a_0 es divisible por 2
a es divisible por 3	si y sólo si	$a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ es divisible por 3
a es divisible por 5	si y sólo si	a_0 es 0 o 5
a es divisible por 7	si y sólo si	$a_0 + 3\,a_1 + 2\,a_2 - a_3 - 3\,a_4 - 2a_5 + \ldots$ así sucesivamente es divisible por 7

1.1.1 Ejemplo

Estudiar si a = 38220 es divisible por 2, 3, 5 ó 7.

Solución

En este número $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 8$ y $a_4 = 3$.

Como $a_0 = 0$ es divisible por 2, entonces a es divisible por 2. Como 0 + 2 + 2 + 8 + 3 = 15 es divisible por 3, entonces a es divisible por 3.

Como $a_0 = 0$, entonces a es divisible por 5. Por último como

$$a_0 + 3\,a_1 + 2\,a_2 - a_3 - 3\,a_4 = 0 + 3.2 + 2.2 - 8 - 3.3 = -7,$$

entonces a es divisible por 7.

Notas Históricas

Durante mucho tiempo, se ha sumado y multiplicado sin darse cuenta de las leyes formales de estas operaciones. A comienzos del siglo XIX se empezaron a estudiar las propiedades formales de estas operaciones, G. Peano (1835- 1932) estableció una descripción axiomática de los números naturales con cinco axiomas que se conocen como axiomas de Peano y fue pionero con B. Russell (1872- 1970) y A.N. Whithead (1861-1947), en la fundamentación de la matemática. Estos últimos escribieron una obra magna los "Principia Mathematica" que fue publicada entre 1910 y 1913. En ella, en el teorema 110643 aparece demostrado que 1 + 1 = 2, este teorema se encuentra en la página 83 del segundo volumen y para comprender la demostración antes hay que haber estudiado el primer volumen. Una prueba, algo más breve, de que 1 + 1 = 2 se encuentra en los "Eléments de Mathématique" del grupo Bourbaki en ella el número 1 no aparece hasta haber leído más de doscientas páginas.

Llamaremos valor absoluto de un número entero n, al mismo número es decir n, si el número es un entero positivo y al opuesto, es decir - n, si el número es un entero negativo. Al valor absoluto de n lo designaremos por $|n|$, entonces

$$|n| = n \text{ si } n \geq 0,\ |n| = -n \text{ si } n < 0.$$

El valor absoluto del número 5 es $|5| = 5$, el valor absoluto de - 3 es $|-3| = 3$, el valor absoluto de -7 es $|-7| = 7$, el valor absoluto de 0 es $|0| = 0$.

• Dados dos números enteros, por ejemplo 15 y 6, se tiene que existen dos números, q y r con $0 \leq r < |6|$, tales que

$$15 = 6q + r.$$

En este caso obsérvese que los únicos valores que verifican esto son $q = 2$ y $r = 3$.

Este resultado constituye un famoso teorema en teoría de números que fue conocido por los griegos en el siglo III a. C. y se denomina Algoritmo de la División, cuyo enunciado general es el siguiente.

> Si a y b son dos números enteros con $b \neq 0$, existen q y r enteros tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < |b|$. Además q y r son únicos.

A los números a, b, q, y r del resultado anterior se les suele llamar *dividendo*, *divisor*, *cociente* y *resto*.

Dados 3 y 7 se tiene que $3 = 7.0 + 3$, $0 \leq 3 < 7$.

Dados 7 y 3 se tiene que $7 = 3.2 + 1$, $0 \leq 1 < 7$.

Dados -15 y 8 se tiene que $-15 = 8.(-2) + 1$, $0 \leq 1 < 8$.

Dados - 23 y - 17 se tiene que $-23 = (-17).2 + 11$, $0 \leq 11 < |-17| = 17$.

1.1.2 Ejemplo

Demuéstrese que dado un número entero a, entonces uno de los números siguientes a, a - 1 ó a - 2, es múltiplo de3.

Solución

Por el Algoritmo de División dados a y 3 se tiene que $a = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$.

Si $r = 0$, entonces $a = 3q$ por lo que $3 \mid a$.

Si $r = 1$, entonces $a - 1 = 3q$ y $3 \mid a - 1$.

Si $r = 2$, entonces $a - 2 = 3q$ y $3 \mid a - 2$.

Obsérvese que hemos demostrado también que, dados tres enteros consecutivos, uno y sólo uno de ellos, es múltiplo de 3, ya que basta tomar como a el mayor de ellos.

Sean a y b números enteros alguno de ellos distinto de cero. Sea d otro número entero tal que $d \mid a$ y $d \mid b$. Entonces diremos que d es *divisor común* de a y b. Puesto que $1 \mid n$ para todo entero n, entonces el conjunto de divisores comunes de a y b es no vacío.

Si $a = 20$ y $b = 12$, los divisores comunes de a y b son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Si $a = 40$ y $b = 100$, los divisores comunes de a y b son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ y ± 20.

Si $a = -13$ y $b = -15$, los divisores comunes de a y b son ± 1.

Si $a = 84$ y $b = -70$, los divisores comunes de a y b son $\pm 1, \pm 2, \pm 7$ y ± 14.

Sean a y b números enteros, alguno de ellos distinto de cero. Un divisor común $d > 0$ de a y b se denomina *máximo común divisor* de a y b si cada común divisor de a y b divide también a d. Al máximo común divisor de a y b le designaremos por *m.c.d.(a, b)*.

En el caso de que $a = b = 0$, entonces m.c.d.$(0, 0) = 0$.

Del ejemplo anterior tenemos que:

Si $a = 20$ y $b = 12$, entonces m.c.d.$(20, 12) = 4$.

Si $a = 40$ y $b = 100$, entonces m.c.d.$(40, 100) = 20$.

Si $a = -13$ y $b = -15$, entonces m.c.d.$(-13, -15) = 1$.

Si $a = 84$ y $b = 70$, entonces m.c.d.$(84, 70) = 14$.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números enteros alguno de ellos distinto de cero. Llamaremos *máximo común divisor de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ al divisor común $d > 0$ tal que cualquier otro divisor común de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divide también a d. Se designa mediante m.c.d.$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

En el caso de que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, entonces m.c.d.$(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Así el máximo común divisor de 100, 80 y 20 es 20, y el máximo

común divisor de 4, -6, 8 y -10 es 2.

Un concepto esencial en la teoría de números es el de número primo. Anteriormente hemos visto que cada número $p > 1$ es divisible por 1 y por p. Si éstos son los únicos divisores positivos de p, diremos entonces que p es un *número primo*. A un número entero $a > 1$, que no es primo le denominaremos *compuesto*. De la definición de número primo, resulta evidente que un entero $p > 1$ es primo si y sólo si es imposible expresar p como a.b, donde a y b son enteros, y ambos $1 < a < p$ y $1 < b < p$.

En el conjunto de los diez primeros números naturales 2, 3, 5 y 7 son primos, mientras que 4, 6, 8, 9 y 10 son números compuestos. Observemos que el número 2 es el único número primo par.

1.1.3 Ejemplo

Factorizar 276 como producto de primos.

Solución

Como 276 es divisible por 2, se tiene que $276 = 2 . 138$. Análogamente $138 = 2 . 69$. Como 69 es divisible por 3, se tiene $69 = 3 . 23$, puesto que 23 es primo, finalmente se puede escribir

$$276 = 2 . 2 . 3 . 23.$$

- Un resultado esencial en la teoría de números enteros es el que asegura que todo número entero $n > 1$ puede factorizarse como producto de primos y, en cierto sentido, esta factorización es única. Este resultado fue establecido por Euclides en el libro IX de sus Elementos.

Es fácil obtener factorizaciones de 48, 124 y 363

$$48 = 2 . 24 = 2 . 2 . 12 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 2^4 . 3.$$

$$124 = 2 . 62 = 2 . 2 . 31 = 2^2 . 31.$$

$$363 = 3 . 121 = 3 . 11^2.$$

(donde por a^n designamos el producto de a por a, n veces; a n se le denomina exponente de a).

• La última factorización de cada uno de los ejemplos anteriores es la llamada *factorización canónica*, que es la dada como producto de primos elevados al máximo exponente.

La factorización canónica de los números enteros permite calcular de forma sencilla el máximo común divisor de dos números.

Dados los números 2520 y 9438, se tiene que factorizando canónicamente tenemos

$$2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 \text{ y } 9438 = 2 . 3 . 11^2 . 13$$

Entonces el m.c.d.(2520, 9438) es el producto de los factores primos comunes a ambos números, elevados al menor de los exponentes que aparecen en ese factor en ambos números; así será m.c.d.(2520, 9438) $= 2 . 3 = 6$.

1.1.4 Ejemplo

Calcúlese el máximo común divisor de 2640 y 3580.

Solución

Como

$$2640 = 2^4 . 3 . 5 . 11 \text{ y } 3580 = 2^2 . 5 . 179.$$

se tiene que el

$$\text{m.c.d.}(2640, 3580) = 2^2 . 5 = 20.$$

Sean a y b dos números enteros. Llamaremos *mínimo común múltiplo* de a y b, al menor entero positivo que es múltiplo de ambos; lo designamos por *m.c.m. (a, b)*.

Si $a = 8$ y $b = 5$, el múltiplo positivo más pequeño de ambos será 40.

Si $a = 8$ y $b = 10$, el m.c.m.$(8, 10) = 40$.

Si $a = 8$ y $b = 16$, el m. c.m.$(8, 16) = 16$.

• Observando los ejemplos anteriores es fácil deducir cómo calcular el mínimo común múltiplo de dos números en general. Para ello, basta hacer la factorización canónica de los números y tomar el producto de

todos los factores primos elevados al mayor exponente que aparezca en a ó en b. Volviendo a los ejemplos anteriores:

$8 = 2^3$ y $5 = 5$, entonces m.c.m.$(8, 5) = 2^3 . 5 = 40$.

$8 = 2^3$ y $10 = 2 . 5$, entonces m.c.m.$(8, 10) = 2^3 . 5 = 40$.

$8 = 2^3$ y $16 = 2^4$, entonces m.c.m.$(8, 16) = 2^4 = 16$.

Sean $a_1, a_2,...,a_n$ números enteros. Llamaremos *mínimo común múltiplo de* $a_1, a_2,...,a_n$ y lo designaremos mediante m.c.m.$(a_1, a_2,...,a_n)$ al entero positivo más pequeño que es múltiplo de todos ellos a la vez.

Si $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, $a_3 = 6$ y $a_4 = 8$, entonces es fácil comprobar que m.c.m.$(4, 10, 6, 8) = 120$.

1.2 Números racionales

Un número racional es un número que se puede escribir como el cociente de dos enteros, donde el entero en el denominador es distinto de cero:

$$\frac{m}{n} \text{ (ó } m / n) \text{ donde m y n son enteros y } n \neq 0.$$

Al número m / n también se le denomina *fracción*, a los números m y n se les denomina el *numerador* y el *denominador* de la fracción.

Cada número entero n se puede considerar como número racional pues n = n / 1, por lo tanto el conjunto de números enteros está contenido dentro del conjunto de los números racionales. Al conjunto de los números racionales lo denominaremos por el símbolo **Q**.

Los siguientes son números racionales:

1 / 2, - 5 / 4, - 5, 6, 100 / 40, 4 / 100, 0 / 1 = 0, -30 / 40.

Dos números racionales a / b y c / d se dice que son iguales o equivalentes si a. d = b. c.

Así, todos los números racionales pueden ser representados por un número infinito de fracciones (cociente de números enteros).

Por ejemplo:

$$\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-3}{-9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \ldots$$

Usualmente, los números racionales se suelen escribir de la forma a / b, donde a y b no tienen ningún factor común. Por ejemplo

$$\frac{42}{105} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2}{5}.$$

Este tipo de fracciones (como 2 / 5) se les llama irreducibles, es decir una fracción es *irreducible* cuando el numerador y el denominador no pueden dividirse a la vez por un mismo número distinto de 1 dando resto cero.

Reducir dos o mas fracciones a *común denominador* es hallar otras fracciones, equivalentes, que tengan todas ellas el mismo denominador.

Dadas dos fracciones a / b, c / d la forma más sencilla de encontrar fracciones equivalentes es calcular el m.c.m.(b, d) = m, y después multiplicar el númerador y denominador de cada fracción por m y operar de la forma siguiente

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \frac{m}{b}}{m}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot \frac{m}{d}}{m}$$

Por ejemplo, dados 1 / 3, 2 /4, como el m.c.m.(3, 4) = 12 se tiene

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \frac{12}{3}}{12} = \frac{4}{12}, \quad \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot \frac{12}{4}}{12} = \frac{6}{12}.$$

Entonces 4 / 12 y 6 / 12 son fracciones equivalentes a 1/ 3 y 2 /4 con el mismo denominador.

Dados 1 / 2, 2 / 3 y 3 /5, como m.c.m.(2, 3, 5) = 30, entonces 15 / 30, 20 / 30 y 18 / 30 son fracciones equivalentes a 1 / 2, 2 / 3 y 3 / 5 con el mismo denominador.

- Para poder sumar o restar dos números racionales tienen que tener el mismo denominador. Si los números racionales no tienen el mismo denominador, para sumarlos o restarlos, hay que reducirlos previamente a común denominador.

Sean a / m y b / m dos números racionales con el mismo denominador, entonces, la *suma* o la *diferencia* es otro número racional que tiene por numerador la suma o diferencia de los numeradores a + b ó a - b, y por denominador el denominador común m.

Así:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=\frac{4}{12}+\frac{6}{12}=\frac{10}{12},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{4}=\frac{4}{12}-\frac{6}{12}=\frac{-2}{12},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{15}{30}+\frac{20}{30}+\frac{18}{30}=\frac{53}{30},$$

$$\frac{4}{6}+\frac{2}{5}-\frac{5}{7}=\frac{140}{210}+\frac{84}{210}-\frac{150}{210}=\frac{74}{210}.$$

El *producto de dos números racionales* es otro número racional que tiene por numerador, el producto de los numeradores y por denominador, el producto de los denominadores.

Así, $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{48}$ y $\frac{-1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{7}{5}=\frac{-224}{180}$,

Sean a / b y c / d dos números racionales; el cociente de estos dos números a / b : c / d es otro número racional que tiene por numerador el número a.d y por denominador el número b. c.

Así, $\frac{3}{5}:\frac{5}{6}=\frac{18}{25}$, $\frac{1}{3}:\frac{-7}{8}=\frac{-8}{21}$.

Se denomina *expresión decimal de un número racional* a la forma decimal que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

Así por ejemplo:

(a) 1 / 2 = 0'5000.., (b) 1 /4 = 0'25000.., (c) 1 /3 = 0'33333..,
(d) 4 / 11 = 0'363636.., (e) 1 / 6 = 0'16666.. (f) 45 / 22 = 2'04545...

• Una fracción es exacta cuando en la división aparece un resto parcial nulo, como en las fracciones (a) y (b). Una fracción es periódica pura cuando las cifras del cociente se repiten en bloques iguales empezando después de la coma, como en las fracciones (c) y (d). Una fracción es periódica mixta cuando las cifras del cociente se repiten en bloques iguales, pero no desde la coma, como en las fracciones (e) y (f). Estas tres formas decimales son las únicas que aparecen al calcular la expresión decimal de un número racional. Además todo número decimal de una de estas tres formas es la expresión decimal de un número racional.

1.2.1 Ejemplo

Encontrar la forma fraccionaria del los números racionales 0'245, 0'38383838.. y 0'234323232...

Solución

Como 1000. 0'245 = 245, entonces 245 / 1000 = 0'245.

Sea q = 0'383838, entonces 100.q = 38' 383838.., luego 100.q - q=38, así 99.q = 38, por lo tanto q = 38 / 99.

Sea u = 0'234323232.. entonces 100000. q = 23432'323232.. y 1000.q = 234'323232.., luego 100000. q - 1000. q = 23198, así 99000.q = 23198, por lo tanto

$$q = \frac{23198}{99000}.$$

1.3 Ejercicios

1.- Demuéstrese que dado un número entero a, entonces a, a -1, a -2, ó a -3 es múltiplo de 4.

2.- Calcúlese el cociente y el resto al aplicar el Algoritmo de la División a los números a y b siguientes siendo el dividendo a y el divisor b.

(a) $a = 122, b = 5$, (b) $a = -89, b = 3$, (c) $a = 79, b = -4$.

3.- Calcúlese el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de: (a) 168 y 300, (b) 120 y 350.

4.- Simplifíquese el número racional $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-(\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9})}{\frac{7}{6}-(\frac{2}{4}+8)}$ y hállese su fracción irreducible.

5.- Encuéntrese la forma fraccionaria del los números racionales 0'387, 0'386767676.. y 0'2356666...

TEMA 2

Números reales

Los números racionales que se han estudiado en el tema anterior, junto con los números irracionales que se verán en este tema forman los números reales. De la importancia de estos números ya se dieron cuenta los griegos seis siglos antes de Cristo.

Este tema se inicia con la introdución de los números reales y sus propiedades; a continuación se estudian las desigualdades y el concepto de valor absoluto que servirán para introducir el concepto de intervalo; después se analizarán las potencias de los números reales y finalmente se estudian las ecuaciones e inecuaciones en una variable y las ecuaciones de segundo grado y se establece una introducción a los logaritmos, que se estudiarán de forma más rigurosa en el tema 27.

2.1 Introducción y propiedades

Como hemos visto los números racionales se pueden expresar como números decimales periódicos. Además se ha observado que todo número decimal periódico se puede expresar como fracción, por lo tanto como número racional.

Llamaremos número irracional a todo número decimal no periódico. Por ejemplo

1'121121112...

Algunos números irracionales surgen del estudio de cuestiones geométricas. Así, al medir el cociente de la longitud de una circunferencia por el diámetro de la misma, aparece el número π,

$$\pi = 3'14159265..$$

Los números racionales e irracionales forman los números reales. El conjunto de estos números se designa por la letra **R**.

Así -3 / 4, 4, -5, 0'721432 = 721432 / 1000000, π = 3'15159265.., 10023'124267834.., son números reales.

Notas Históricas

El origen del concepto de número irracional se encuentra siempre en la intuición geométrica y en la necesidad de la misma Geometría. Pitágoras fue el primero en señalarlo de forma parecida a la siguiente: Si se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitud 1, la longitud de la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$ (véase 2.3) y éste no es un número racional. Si escribimos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros primos entre sí, fácilmente se llega a una contradicción con resultados conocidos de la divisibilidad de números enteros. Tan notable descubrimiento bien merecía el sacrificio de 100 bueyes con que fue celebrado por Pitágoras.

Los matemáticos griegos posteriores estudiaron además de estos irracionales sencillos, otros cada vez mas complicados; encontrándose, en Euclides, tipos como $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ y otros semejantes. En general, se puede decir que los griegos se limitaron esencialmente a trabajar con los irracionales que se obtienen por aplicación repetida de la extracción de raíces cuadradas y que, por ello se podrían construir con la regla y el compás, pero nunca llegaron a tener la idea general de número irracional.

Esta hizo su aparición al final del siglo XVI, como consecuencia de la introducción de los números decimales, cuyo uso se generalizó ya antes con motivo de la formación de la tabla de logaritmos. Cuando se transforma un quebrado ordinario en número decimal, pueden obtenerse, aparte de números decimales limitados, otros ilimitados que son necesariamente periódicos. Ahora bien, nada hay que impida considerar un número decimal aperiódico, esto es un número decimal cuyas cifras se suceden sin obedecer a ley alguna determinada y sin parar; cualquiera lo consideraría como un número determinado, aunque naturalmente, no racional. Con esto se tiene ya el concepto de número irracional, espontánea creación, en cierto modo, del proceso aritmético

que lleva consigo la fracción decimal. Históricamente acontece así, que el cálculo obligó a que se introdujeran los nuevos conceptos y, sin que se pensase gran cosa sobre su esencia y fundamento, se operaba con ellos, afirmando su existencia, sobre todo al reconocer repetidamente su extraordinaria utilidad.

Sólo al llegar al año 60 del siglo XIX se vió la necesidad de formular aritméticamente, de manera precisa, los fundamentos de los números irracionales. Weierstrass fue el primero que abrió camino en estas investigaciones a través de las lecciones que explicaba en la Universidad de Berlín. En el año 1872 G. Cantor, fundador de la teoría de conjuntos, dió en Universidad de Hall una teoría general de dichos números . De forma simultánea pero independiente, Dedekind hizo otro tanto en la Universidad de Brunswick.

Felix Klein (1849- 1923)

- Sean a, b y c tres números reales; entonces se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplos
a + b es real	$3 + \pi$ es real
a . b es real	5. 10023'124267834.. es real
$a + 0 = 0 + a = a$	$2/3 + 0 = 0 + 2/3 = 2/3$
$a. 1 = 1. a = a$	$(-5).1 = 1. (-5) = -5$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$1 + (3 + 5/6) = (1 + 3) + 5/6$
$a. (b. c) = (a. b). c$	$3.(\pi. 8) = (3. \pi). 8$
$a + b = b + a$	$7 + 2/3 = 2/3 + 7$
$a. b = b. a$	$5. 7/6 = 7/6. 5$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$1'7 + (-1'7) = (-1'7) + 1'7 = 0$
Si $a \neq 0$, $a. (1/a) = (1/a). a = 1$	$3. (1/3) = (1/3). 3 = 1$
$a. (b + c) = a. b + a. c$	$5. (8 + \pi) = 5. 8 + 5. \pi$
$(a + b). c = a. c + b. c$	$(8 + \pi). 5 = 8. 5 + \pi. 5$

Si a. b=0 entonces a =0 ó b =0	Si x.5 = 0 entonces x = 0

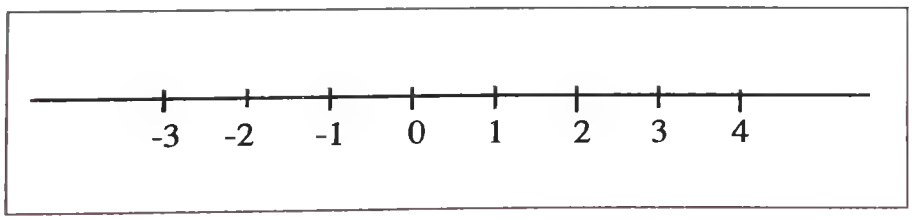
2.1.1 Ejemplos

1.-Si $a \neq 0$, b, c son números reales entonces

$$\frac{a \cdot b + a \cdot c}{a} = \frac{a \cdot (b+c)}{a} = a \cdot \frac{1}{a} \cdot (b+c) = 1.(b+c) = b+c.$$

2.- Si $a \neq 0$ y a. b = a. c, entonces a.b - a. c =0, luego a.(b - c) = 0, entonces como $a \neq 0$, b - c = 0, así b =c.

- Los números reales se pueden hacer corresponder con los puntos de una recta; para ello, basta con señalar en una recta dos puntos, al punto de la izquierda se le asocia el número real 0 y al punto de la derecha el número 1. La representación de los números enteros se hace llevando el segmento que va de 0 a 1 hacia la derecha o hacia la izquierda tantas veces como indica el valor absoluto del número.

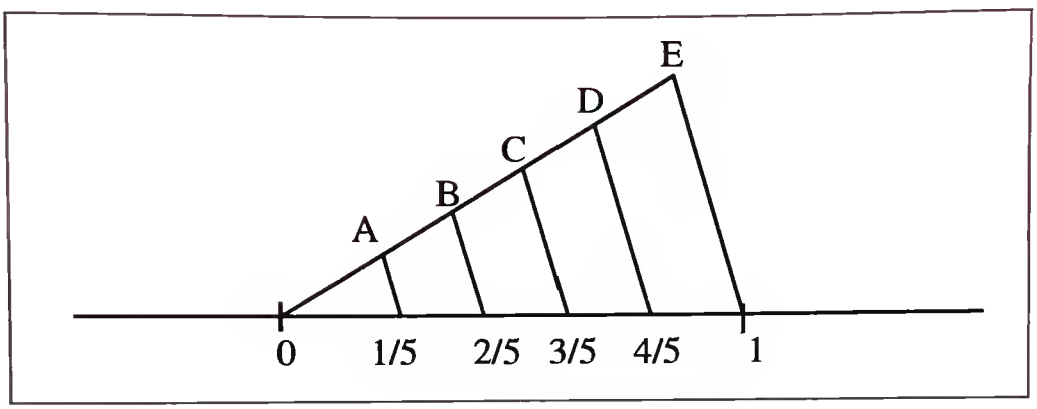


El resto de los puntos de la recta representan números reales; no todos ellos se pueden construir utilizando regla y compás. Los números racionales pueden construirse utilizando el teorema de Tales. Algunos números irracionales se pueden construir mediante teoremas geométricos, como el teorema de Pitágoras. (Estos teoremas pueden verse en el tema 10).

2.1.2 Ejemplo

Si queremos construir el número 4 / 5, trazaremos una recta por el 0 distinta a la recta real que pasa por el 1. A continuación se harán sobre

ella cinco segmentos iguales 0A, AB, BC, CD, DE y se unirá el punto final E del último segmento con el 1. Posteriormente se trazarán líneas paralelas a la que pasa por el 1 y E por los puntos A, B, C, D. El punto de corte en la recta real, de la recta construida que pasa por D, será 4 / 5.



2.2 Desigualdades, valor absoluto e intervalos

Diremos que un número real a es *positivo*, si a es distinto de cero y la parte no decimal del número real más uno es un número natural. Si un número real distinto de cero no es positivo diremos que es negativo.

Así por ejemplo, 2'37 es positivo ya que 2 + 1 = 3 es natural, 0'28 es positivo puesto 0 + 1 = 1 es natural, -1'537 es negativo puesto que -1 + 1 = 0 no es natural.

Sean a y b dos números reales; diremos que $a > b$ si a = b + q, donde q es un número real positivo.

Diremos que $a \geq b$ si a > b ó a = b.

Así por ejemplo, $1 < \sqrt{2} = 1'41..., 3 / 5 < 4, 3 \leq 9 / 3$.

• Una desigualdad lo mismo que una igualdad puede ser cierta o falsa. Por ejemplo, la desigualdad $x < 3$ es cierta para $x = 1$, pero falsa para $x = 5$. Las desigualdades verifican las siguientes propiedades.

Propiedades	Ejemplos
Si $a < b$, $a + c < b + c$	Puesto que $3 < 4$, $3 + 5 < 4 + 5$
Si $a < b$ y $b < c$, $a < c$	Puesto que $1/2 < 4$ y $4 < 7$, $1/2 < 7$
Si $a < b$ y $c > 0$, $a.c < b.c$	Puesto que $1/2 < \pi$, $3.1/2 < 3.\pi$
Si $a < b$ y $c < 0$, $a.c > b.c$	Puesto que $1/2 < \pi$, $-3.1/2 > -3.\pi$
Si $a > b > 0$ ó $0 > a > b$, $1/a < 1/b$	Puesto que $4 > 3$, $1/3 < 1/4$.

2.2.1 Ejemplo

Demostrar que si $a - b < c - d$, entonces $a + d < b + c$.

Solución

Como $a - b < c - d$, si sumamos a ambos miembros el número b, la desigualdad no cambia, así

$$a - b + b < c - d + b,$$

por lo tanto $a < c - d + b$, si ahora sumamos a ambos miembros el número d la desigualdad sigue sin cambiar

$$a + d < b + c.$$

2.2.2 Ejemplo

Demostrar que si $a - 3 < b - 7$, entonces $-2.a > 8 - 2.b$.

Solución

Sumando 3 a ambos miembros de la desigualdad resulta que $a - 3 + 3 < b - 7 + 3$, por tanto, $a < b - 4$. Si se multiplica ahora la desigualdad anterior por -2, entonces la desigualdad cambia de sentido y se tiene que

$$-2.a > 8 - 2.b.$$

Se llama *valor absoluto* de un número real a, al mismo número si es positivo o cero y a su opuesto si es negativo, es decir,

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,$$
$$|a| = -a \text{ si } a < 0.$$

Así $|\pi| = \pi$ y $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

2.2.3 Ejemplo

Demostrar que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a+b| = |a| + |b|$, y que si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a+b| < |a| + |b|$.

Solución

Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$, y así

$|a+b| = a+b$, $|a| = a$ y $|b| = b$, luego $|a+b| = |a| + |b|$.

Supongamos que $a > 0$ y $b < 0$. Si $a > |b|$, se tiene que $a + b > 0$, así $|a+b| = a+b$, como $|a| = a$, $|b| = -b$ y $a + b < a - b$ puesto que b es negativo, se tiene

$$|a+b| = a+b < a-b = |a| + |b|.$$

Si $a < |b|$ se tiene que $a + b < 0$, así $|a+b| = -(a+b)$, como $|a| = a$, $|b| = -b$ y $-a - b < a - b$ puesto que a es positivo, se tiene

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b < a-b = |a| + |b|.$$

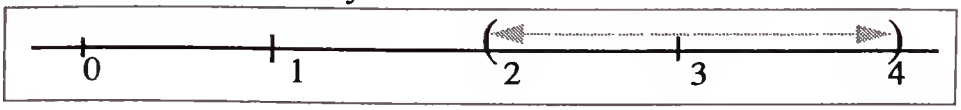
- Las relaciones $<$ y $\leq$ permiten definir algunos subconjuntos de los números reales que tienen una interpretación sencilla en la recta real y que se utilizarán posteriormente a lo largo del libro.

Se llama *intervalo abierto* (a, b) al conjunto de los números reales x que verifican las desigualdades

$$a < x < b.$$

Así el intervalo (2, 4) es el conjunto de los números reales que están

en la recta real entre el 2 y 4.



Se denomina *intervalo semiabierto* [a, b) al conjunto de los números reales x, $a \leq x < b$, y (a, b] al conjunto de los números reales $a < x \leq b$.

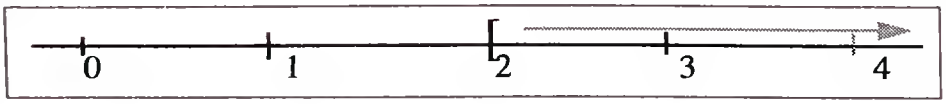
Se denomina *intervalo cerrado* [a, b] al conjunto de los números reales x, tales que $0 \leq x \leq b$.

Así, el intervalo [2, 4) es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 2 y el 4, incluyendo el número 2, y el intervalo (2, 4] es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 2 y el 4, incluyendo el número 4.

El intervalo [1, 3], es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 1 y el 3, incluyendo al 1 y al 3.

Se denomina *semirecta abierta* (a, $\rightarrow$) ó ($\leftarrow$, a) al conjunto de los números reales x, $a < x$ respectivamente $x < a$, y *semirecta cerrada* [a, $\rightarrow$) respectivamente ($\leftarrow$, a] al conjunto de los números reales x, $a \leq x$ respectivamente $x \leq a$.

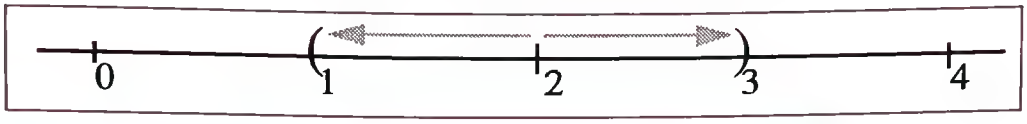
Así [2, $\rightarrow$) es el conjunto de los números mayores o iguales que 2, y es la semirecta señalada en la figura con la flecha incluyendo al número 2.



Se llama entorno abierto de un número real a y radio $r > 0$, al conjunto de números reales x tales que $a - r < x < a + r$, o al intervalo $(a - r, a + r)$.

Se llama entorno cerrado un número real a y radio $r > 0$, al conjunto de números reales x tales que $a - r \leq x \leq a + r$, o al intervalo $[a - r, a + r]$.

Así por ejemplo el entorno del punto 2 y radio 1, es el intervalo $(2-1, 2+1) = (1, 3)$ como se indica en la figura siguiente.



2.3 Potencias de números reales

Sea a un número real, y sea n un número natural. Entonces se denomina *potencia del número a con exponente n*, al número

$$a^n = a \overset{n}{\ldots} a.$$

Esto es, a^n es el producto de n factores, cada uno de los cuales es igual al número a. Al número a se le llama *base* y al número n *exponente*, y diremos que a^n es la potencia de base a y exponente n.

Así por ejemplo $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$,

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^4 = \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{81}{16}.$$

- La definición anterior tiene sentido si el número de factores es 1 o más.

Sea $a \neq 0$, un número real, y sea n un número natural. Entonces se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si $n = 0$, se define $a^0 = 1$.

Así por ejemplo $(\frac{1}{5})^{-3} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3 = 125$, $(\frac{3}{2})^{-2} = (\frac{2}{3})^{2} = \frac{4}{9}$.

- Así, hemos definido a^m, cuando m es un entero. Para extender esta definición a exponente racional no entero se necesita definir la raíz n-ésima de un número real, donde n es un entero positivo.

Sea a un número real y n un número natural, tal que existe un número real b tal que $b^n = a$, entonces se llamará a b la raíz n-ésima de a. Este número b lo denotaremos por $a^{1/n}$ ó $\sqrt[n]{a}$.

Si n= 2, entonces $a^{1/2}$ se llamará la raíz cuadrada de a y escribimos $\sqrt{a}$. Si n = 3, entonces $a^{1/3}$, se llamará la raíz cúbica de a y escribimos $\sqrt[3]{a}$

Así por ejemplo $\sqrt[3]{-27} = -3$, puesto que $(-3)^3 = -27$. $\sqrt[4]{16} = 2$ ó -2, puesto que $(2)^4 = (-2)^4 = 16$, $\sqrt{81} = 9$ ó -9, puesto que $(9)^2 = (-9)^2 = 81$.

- Dado un número real a y un número natural n, no siempre existe un número real b tal que $b^n = a$. Por ejemplo si a es negativo y n es par nunca existe un número real b verificando $b^n = a$.

Como se observa en los ejemplos anteriores, un número real positivo puede tener dos raíces, de hecho cada número real positivo tiene dos raíces cuadradas. Por notación cuando escribamos $\sqrt{a}$, denotaremos la raíz cuadrada positiva de a y por $-\sqrt{a}$, denotaremos la raíz cuadrada negativa de a, cuando se quiera denotar ambas, pondremos $\pm\sqrt{a}$.

Sea a un número real y m / n un número racional, tal que existe un número real b tal que $b^n = a^m$, entonces se llamará a b la raíz n-ésima de a^m. Este número b lo denotaremos por $a^{m/n}$ ó $\sqrt[n]{a^m}$.

Así por ejemplo $(-2)^{4/5} = \sqrt[5]{(-2)^4} = \sqrt[5]{16}$, $(\frac{8}{27})^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

- Dados tres números reales a^m, a^n y b^n distintos de cero. Se tiene que verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplos
$a^m . a^n = a^{m+n}$	$2^{1/3} . 2^{3/5} = 2^{14/15}$
$a^m / a^n = a^{m-n}$	$3^{1/2} / 3^{3/4} = 3^{-1/4}$
$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(5^{3/2})^{2/5} = 5^{6/10}$
$a^n . b^n = (a . b)^n$	$(-2)^3 . (1/2)^3 = (-1)^3 = -1$
$a^n / b^n = (a / b)^n$	$7^4 / 3^4 = (7/3)^4$

2.3.1 Ejemplo

Simplificar $\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{96} - 5\sqrt{98}$.

Solución

Como $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, entonces

$$\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{96} - 5\sqrt{98} =$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3}-5\sqrt{7^2\cdot 2}=3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}-5\cdot 7\cdot\sqrt{2}=$$
$$=\sqrt{2}\cdot(12-35)=-23\cdot\sqrt{2}.$$

2.3.2 Ejemplo

Simplificar

$$\left(\frac{4\cdot y}{\sqrt{y}}\right)^3.$$

Solución

$$\left(\frac{4\cdot y}{\sqrt{y}}\right)^3=\frac{4^3\cdot y^3}{\sqrt{y^3}}=$$

$$\frac{64\cdot y^3}{y\cdot\sqrt{y}}=\frac{64\cdot y^3\cdot\sqrt{y}}{y\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}=\frac{64\cdot y^3\cdot\sqrt{y}}{y\cdot\sqrt{y^2}}=64\cdot y\cdot\sqrt{y}$$

2.3.3 Ejemplo

Simplificar $\sqrt{\frac{x^6\cdot y^4}{z^8}}$.

Solución

$$\sqrt{\frac{x^6\cdot y^4}{z^8}}=\frac{\sqrt{x^6}\cdot\sqrt{y^4}}{\sqrt{z^8}}=\frac{x^3\cdot y^2}{z^4}.$$

2.3.4 Ejemplo

Simplificar $\sqrt{\dfrac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}}}$.

Solución

Como $\dfrac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}} = (a+1)^{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}\cdot a^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}} = (a+1)^{-2}\cdot a^{2}$,

entonces

$$\sqrt{\frac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}}} = (a+1)^{-1}.\, a = \frac{a}{a+1}.$$

2.4 Ecuaciones e inecuaciones en una variable

A veces en Matemáticas hay expresiones en las que aparece una cantidad desconocida que normalmente se designa con la letra x. Como por ejemplo en las expresiones:

1) $ax+b=c$.

2) $ax+b>c$ ó $ax+b\geq c$.

3) $ax+b<c$ ó $ax+b\leq c$.

Donde a, b y c son números reales.

A las expresiones de la forma 1) se les suele llamar *ecuaciones lineales en una variable* y a las expresiones de la forma 2) y 3) se les suele llamar *inecuaciones lineales en una variable*.

El resolver una ecuación o una inecuación consiste en encontrar los números reales que verifican la igualdad o las desigualdades que se consideran. En el tema 7 tendremos la oportunidad de estudiar más a fondo las ecuaciones lineales.

2.4.1 Ejemplo

Resolver las ecuaciones lineales

(a) $2x + 4 = 8$.

(b) $3x + 7 = 5x - 4$.

Solución

(a) Utilizando las operaciones con números reales se tiene que si $2x + 4 = 8$, entonces $2x = 8 - 4 = 4$, así $x = 4 / 2 = 2$.

(b) Operando se tiene $3x + 7 - 5x = -4$, luego $-2x + 7 = -4$, por lo tanto $-2x = -11$, así $x = 11/2$.

2.4.2 Ejemplo

Resolver la inecuaciones lineales

(a) $\dfrac{2x+3}{2} < \dfrac{5x-4}{3}$.

(b) $3x - 7 \geq 2x + 9$.

Solución

(a) Si se multiplica por el m.c.m.(2, 3) = 6 ambos términos de la desigualdad, la desigualdad no cambia de sentido, ya que 6 es un número real positivo, y se consigue que desaparezcan los denominadores.

$3.(2x + 3) < 2.(5x - 4)$, así $6x + 9 < 10x - 8$. Si restamos a ambos miembros $6x$ la desigualdad sigue sin cambiar de sentido, por lo que se tiene $9 < 4x - 8$. Si ahora se suma 8 a ambos miembros se tiene $17 < 4x$, finalmente si dividimos por 4, se tiene, $17/4 < x$. Luego la solución es el conjunto de números reales mayores que $17/4$, o sea la semirecta abierta $(17/4, \rightarrow)$.

(b) Si se resta a ambos miembros $2x$ la desigualdad sigue sin cambiar de sentido, por lo que se tiene $x - 7 \geq 9$, si se suma 7 a ambos miembros se tiene $x \geq 16$. Luego la solución es el conjunto de números reales mayores o iguales que 16, o sea la semirecta cerrada $[16, \rightarrow)$.

- Se pueden estudiar otro tipo de inecuaciones que están asociadas con el valor absoluto. Así si $a > 0$,

$$|x| < a \text{ si y sólo si } -a < x < a,$$

y

$$|x| \leq a \text{ si y sólo si } -a \leq x \leq a.$$

Por lo tanto la solución de estas inecuaciones es en el primer caso el conjunto de todos los números reales del intervalo abierto (-a, a), y en el segundo caso el conjunto de todos los números reales del intervalo cerrado [-a, a].

2.4.3 Ejemplo

Resolver las inecuaciones

(a) $|x - 6| < 3$.

(b) $|2x - 5| \leq 7$.

Solución

(a) Esta desigualdad es equivalente a $-3 < x - 6 < 3$, si sumamos 6 a todos los términos las desigualdades siguen sin cambiar de sentido, luego $3 < x < 9$, así la solución serán todos los números reales del intervalo abierto (3, 9).

(a) Esta desigualdad es equivalente a $-7 \leq 2x - 5 \leq 7$, si sumamos 5 a todos los términos las desigualdades siguen sin cambiar de sentido, luego $-2 \leq 2x \leq 12$, si ahora se multiplica por 1 / 2 todos los miembros de las desigualdades tenemos $-1 \leq x \leq 6$, así la solución serán todos los números reales del intervalo cerrado [-1, 6].

2.5 Ecuaciones de segundo grado

A veces en matemáticas aparecen expresiones de la forma

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

donde a, b, y c son números reales conocidos y x es una cantidad desconocida que se denomina variable, así por ejemplo

$$3x^2 - 7 = 0, \quad x^2 - 5x + 2 = 0.$$

A este tipo de ecuaciones en las que sólo aparece una variable y el mayor exponente al que está elevado la variable x es 2, se las denomina *ecuaciones de segundo grado*. El resolver una ecuación con una variable x consiste en encontrar aquellos números reales tales que al sustituir la variable x por cada uno de ellos, la ecuación se convierte en una identidad.

Si la ecuación es de la forma $ax^2 + c = 0$ con $a \neq 0$, entonces $ax^2 = -c$ y $x^2 = -c / a$, luego si $-c / a > 0$, esta ecuación tendrá dos soluciones reales que serán

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

- Así si $-c / a = 0$, sólo tendrá una solución $x = 0$, y si $-c / a < 0$ no tendrá ninguna solución real.

Por ejemplo, la ecuación $3x^2 - 9 = 0$, tiene dos soluciones que son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, ya que $\frac{-(-9)}{3} = 3$,

Si la ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a y b $\neq 0$, entonces $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, luego $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$, si sumamos a ambos términos de la igualdad $(\frac{b}{2a})^2$, tenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2,$$

y como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = (x + \frac{b}{2a})^2$$

resulta que

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2,$$

entonces

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

por lo tanto,

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Así, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tendrá dos soluciones, si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tendrá una única solución real $x = \frac{-b}{2a}$, y si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tendrá ninguna solución real.

2.5.1 Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones

(a) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

(b) $2x^2 - 10x + 3 = 0$.

Solución

(a) En esta ecuación $a = 1$, $b = 4$ y $c = 4$, luego $b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, por lo tanto tendrá una única solución que será

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2.$$

(b) En esta ecuación $a = 2$, $b = -10$ y $c = 3$, luego $b^2 - 4ac = 100 - 24 = 76$, por lo tanto la ecuación tendrá dos soluciones que serán

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{76}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{2^2 19}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}.$$

Notas Históricas

Los símbolos que se han ido introduciendo a lo largo del tema, han tenido un desarrollo histórico. Los símbolos + y - fueron introducidos por J. Widman en un libro que apareció publicado en 1489. El símbolo del producto fue establecido por W. Oughthead en el año 1657. El símbolo : para la división fue introducido por J. Rann en 1659. El símbolo = lo estableció R. Recorde a principios del siglo XVI,. Los símbolos > y < fueron introducidos por Thomas Harriot a finales del siglo XVI. La denominación de exponente apareció por primera vez en 1544 en un trabajo de M. Stifen. Finalmente el símbolo $\sqrt{}$ para la raíz fue introducido por C. Rudolff en 1525, y es una variante de la letra r, primera letra de la palabra latina ratix, que significa raíz.

2.6 Logaritmos, ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En la sección 2.3 se há definido la potencia de un número real elevado a un número racional. Se establecerá en el tema 27, que todos los números reales positivos se pueden escribir de la forma

$$2^x, 3^x, 4^x, (1/3)^x, \ldots, m^x,$$

donde la base m puede ser cualquier número real positivo y distinto de uno, y el exponente x es único para cada número real positivo y para cada m.

Se denomina *logaritmo en base* $a > 0$ y $a \neq 1$ de un número $n > 0$, al número x que verifica $a^x = n$, y se escribirá $\log_a n = x$.

2.6.1 Ejemplos

(a) $\log_{10} 10 = 1$, puesto que $10^1 = 10$.

(b) $\log_{10} 100 = 2$, puesto que $10^2 = 100$.

(c) $\log_{10} 10^n = n$, puesto que $10^n = 10^n$.

(d) $\log_2 16 = 4$, puesto que si $2^x = 2^4$ entonces $x = 4$.

(e) $\log_5 125 = 3$, puesto que si $5^x = 5^3$ entonces $x = 3$.

- Los logaritmos como se verá en el tema 27, verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplos
$\log_a m + \log_a n = \log_a(m \cdot n)$	$\log_3 5 + \log_3 10 = \log_3 50$
$\log_a m - \log_a n = \log_a(m / n)$	$\log_3 7 - \log_3 2 = \log_3 7 / 2$
$\log_a m^n = n \log_a m$	$\log_3 5^4 = 4 \log_3 5$
$\log_a m = \log_a n$ si y sólo si $m = n$	Si $\log_2 7 = \log_2 x$, entonces $x = 7$
Si $m > n$ $\log_a m > \log_a n$	Como $8 > 3$, $\log_5 8 > \log_5 3$.

2.6.2 Ejemplos

(a) $\log_{10} \sqrt[3]{3^2} = \log_{10} 3^{2/3} = (2/3) \log_{10} 3$.

(b) $\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 8^{1/4} - \log_2 8^{1/5} = (1/4)\ \log_2 8 - (1/5)\ \log_2 8 = (1/20)\ \log_2 8 = 3/20.$

(c) $\log_3 3^7 - \log_3 3^5 = 7\ \log_3 3 - 5\ \log_3 3 = 2\ \log_3 3 = 2.$

Si $\log_a n = x$, entonces $a^x = n$, por lo que $\log_{10} a^x = \log_{10} n$, y así $x \log_{10} a = \log_{10} n$, por lo tanto

$$\log_a n = x = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} a}.$$

Por la fórmula anterior vemos que para calcular el logaritmo de un número n en base a, sólo necesitamos conocer los logaritmos decimales de a y n.

Así por ejemplo si conocemos $\log_{10} 2$ y el $\log_{10} 7$, se puede conocer $\log_2 7$ y $\log_7 2$.

- Podemos tener una idea aproximada del valor del logaritmo decimal de un número a, utilizando la última de las propiedades de los logaritmos del cuadro de la página anterior, puesto que si:

$$1 < x < 10, \text{ entonces } 0 < \log_{10} x < 1.$$

$$10 < x < 100, \text{ entonces } 1 < \log_{10} x < 2.$$

$$100 < x < 1000, \text{ entonces } 2 < \log_{10} x < 3.$$

$$10^r < x < 10^{r+1}, \text{ entonces } r < \log_{10} x < r+1.$$

De hecho la determinación del logaritmo de un número se hace por aproximaciones.

Se denomina *ecuación logarítmica* en una variable a una ecuación en una variable, en la que la incógnita aparece sometida a un logaritmo, así por ejemplo $\log_a x + \log_a m = n$, donde m y n son números reales.

2.6.3 Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $\log_{10} x^2 - 100 = \log_{10} x$.

(b) $2 \log_{10} x = \log_{10} (4 - 3x)$.

Solución

(a) Por las propiedades de los logaritmos tenemos que $2 \log_{10} x - 100 = \log_{10} x$, luego $\log_{10} x = 100$, entonces $x = 10^{100}$

(b) Como $2 \log_{10} x = \log_{10} x^2$, entonces $\log_{10} x^2 = \log_{10} (4 - 3x)$, por lo tanto $x^2 = 4 - 3x$, y así $x^2 + 3x - 4 = 0$, luego

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = -4 \text{ ó } 1.$$

Se denomina *ecuación exponencial* en una variable a una ecuación en una variable en la que la incógnita aparece en el exponente, así por ejemplo, $m^x + n^x = r$, donde m, n y r son números reales.

2.6.4 Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $9^x - 2.3^{x+2} = -81$.

(b) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$.

Solución

(a) Operando tenemos que $3^{2x} - 2.3^x.3^2 = -81$, luego

$$3^{2x} - 18.3^x + 81 = 0,$$

si denominamos a 3^x por y, entonces la ecuación anterior se podrá escribir como $y^2 - 18y + 81 = 0$, luego

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 324}}{2} = 9 ,$$

por lo tanto

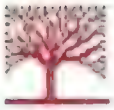
$$3^x = 9 = 3^2,$$

y $x = 2$.

(b) Operando tenemos $2^x .2^{-1} + 2^x + 2^x .2 = 7$, luego $2^x ((1/2) + 3) = 7$, por lo tanto

$$2^x . \frac{7}{2} = 7,$$

así $2^x = 2$ y, por tanto, $x = 1$.



Notas Históricas

Los logaritmos fueron descubiertos por el matemático Escocés J. Napier (1550- 1617). En unas notas de sus primeros años de trabajo aparecía la siguiente tabla:

I	II	III	IIII	V	VI ...
2	4	8	16	32	64 ...

En ella los números romanos representaban el logaritmo en base 2 del número correspondiente en la parte inferior. En 1615 H. Briggs (1561-1631) sugirió a Napier que debería usar el número 10 como base para los logaritmos. Pronto Napier descubrió la importancia de los logaritmos en base 10, debido a que el sistema decimal era el que se empleaba. Durante 25 años estuvo realizando una tabla de logaritmos en base 10. Cuando la tabla fue completada causó una gran inpresión entre los científicos europeos y fue inmediatamente utilizada por dos grandes astrónomos como fueron D. T. Brahe y G.J. Kepler.

2.7 Ejercicios

1.- Demuéstrese que si a y b son dos números reales cualesquiera entonces $|a.b| = |a|.|b|$.

2.- Simplifíquese la expresión $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96} - \frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$.

3.- Simplifíquese la expresión $\frac{(3a^3b^4)^{-3}(4a^2b^{-2})^2}{6(a^2/b^3)}$.

4.- Resuélvanse la inecuaciones lineales:

(a) $\frac{4x+3}{5} < \frac{2x-8}{10}$.

(b) $1/4\,(2x - 7) \geq 3x + 10$.

5.- Resuélvanse las siguientes ecuaciones

(a) $2.\log_{10}(3.x) = \log_{10}(-6.x - 1)$

(b) $4^x - 3.2^{x+2} = -36$.

TEMA 3

Elementos de la teoría de conjuntos

En este tema se presentarán algunas herramientas básicas de las matemáticas que se van a utilizar a lo largo del libro.

En casi todas las áreas de las matemáticas contemporáneas subyace el concepto de conjunto. Este concepto proporciona una estructura base para hacer una formulación precisa de las distintas partes de las matemáticas.

El tema se inicia estudiando primero los conjuntos y subconjuntos, después, sus operaciones y el producto cartesiano de dos conjuntos y se termina introduciendo el concepto de aplicación entre conjuntos, y los distintos tipos de aplicaciones que se pueden dar entre ellos.

3.1 Conjuntos

Un conjunto es cualquier colección, bien definida, de objetos llamados *elementos* o miembros del conjunto. El adjetivo bien definida implica que cualquiera que sea el objeto considerado, se puede determinar si está o no en el conjunto que se analiza. En consecuencia, se trata de evitar conjuntos que dependan de una opinión personal como, por ejemplo el conjunto de los mejores jugadores de la primera división de fútbol de la liga de un cierto año.

Así, son conjuntos, el conjunto de todos los libros de una biblioteca, el conjunto de todos los buitres que anidan en un año dado en un refugio natural determinado o el conjunto de todos los números naturales comprendidos entre 2 y 100. Casi todos los objetos matemáticos son ante todo conjuntos. Por consiguiente, la teoría de conjuntos es, en cierto

sentido, la base sobre la cual se construyen todas la matemáticas.

Notas Históricas

Para Cantor (1845-1918) un conjunto era cualquier colección, familia o agregado de objetos pensados como formando parte de una totalidad.

Para Dedekind (1831-1916) un conjunto era un saco lleno de elementos. Dentro del saco puede haber números, letras, plantas, personas, mastodontes, zapatos,..., prácticamente cualquier cosa.

• Una manera de describir un conjunto con un número finito de elementos es ponerlos entre llaves en forma de lista. Así, el conjunto de las tres primeras letras del alfabeto se puede escribir

$$\{a, b, c\}.$$

El orden de los elementos dentro de las llaves no es importante. Por lo que:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\},$$

serán todos, representantes del mismo conjunto. Por otra parte, los términos repetidos en el listado de los elementos de un conjunto pueden ser ignorados. Así pues, {a, b, c, b} es otro representante más del conjunto dado anteriormente.

Se utilizan las letras mayúsculas, como A, B, C,... para representar conjuntos, y minúsculas para los elementos. Dado un conjunto A, se escribe $x \in A$, si x es un elemento de A; y $x \notin A$, indica que x no pertenece a A.

Si $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $2 \in A$, y $5 \notin A$.

• Algunas veces es inconveniente o imposible describir un conjunto por el listado de todos sus elementos. Por lo que otra manera frecuente, de definir un conjunto, es especificar una propiedad que los elementos del conjunto tienen en común.

Por ejemplo, el conjunto A anterior se podría describir como el conjunto de números enteros positivos pares menores que 11, y normalmente este conjunto se escribe de la forma:

$$A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo par menor que } 11\}.$$

(El símbolo | denota la expresión, "tal que", y sirve para ayudar a determinar los elementos).

El conjunto que contiene todas las letras de la palabra "acceso" puede indicarse por

$$\{a, c, e, o, s\},$$

$$\{x \mid x \text{ es una letra en la palabra "acceso"}\}.$$

- La forma primera de describir el conjunto del ejemplo anterior se dice que es, por *extensión*, (se enuncian todos los elementos del conjunto), y la forma segunda de describirlo se dice que es, por *comprensión*, (se da un criterio de pertenencia, propiedad que cumplen todos sus elementos y sólo ellos).

Si $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces el conjunto también puede describirse como

$$B = \{x \mid x \text{ es un entero, } 1 \leq x \leq 5\}.$$

- Debe tenerse cuidado pues $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ no describe adecuadamente el conjunto B, pues $x = 5/2$, por ejemplo, cumple la propiedad $1 \leq x \leq 5$, pero no pertenece a B. Por lo que hay que tener en cuenta que cuando se describe un conjunto por comprensión el criterio de pertenencia tiene que estar bien determinado.

Los conjuntos son totalmente conocidos cuando se conocen todos sus elementos. Se dice que dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen los mismos elementos.

Si $A = \{4, 9, 16\}$ y $B = \{x^2 \mid x \text{ entero positivo}, 2 \leq x \leq 4\}$, entonces $A = B$.

Si $A = \{ a \}$ y $B = \{ x \mid x = a \}$, entonces $A = B$.

Sean A y B dos conjuntos se dice que A es un *subconjunto* de B o que A esta *contenido* en B si todos los elementos de A son también elementos de B, esto es si $x \in A$ entonces $x \in B$, y se escribe

$$B \supset A.$$

Si $A = \{ 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{ 3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Entonces $C \supset A$, y $C \supset B$, sin embargo A no está contenido en B, ni B está contenido en A.

Si A y B son los conjuntos representados por las figuras siguientes:

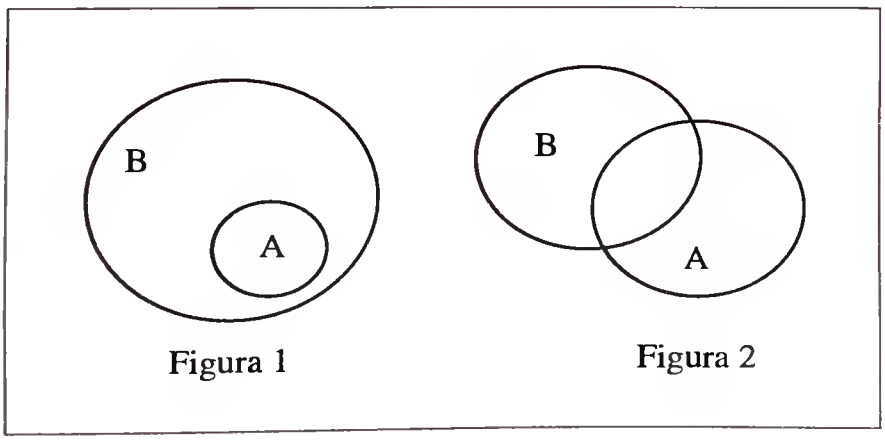


Figura 1 Figura 2

En la figura 1, A está contenido en B. En la figura 2, ni A esta contenido en B, ni B esta contenido en A.

- Los diagramas, como los de las figuras 1 y 2, se usan para mostrar las relaciones entre conjuntos y se denominan diagramas de Euler-Venn o diagramas de Venn. Los diagramas de Venn se usarán ampliamente a lo largo de este tema.

Notas Históricas

Los diagramas de Euler-Venn son diagramas introducidos por el matemático suizo Euler (1701-1783) para trabajar con conjuntos y son simples círculos que representan a éstos. Posteriormente fueron utilizados por el lógico inglés Venn (1834-1923).

- Sea A cualquier conjunto, entonces $A \supset A$, es decir cualquier conjunto es subconjunto de si mismo.

Se denomina *conjunto vacío* aquel que no contiene ningún elemento y se denota por $\varnothing$.

3.1.1 Ejemplo

Demuéstrese que para cualquier conjunto A, $A \supset \varnothing$.

Solución

Si el conjunto $\varnothing$ no estuviera contenido en A, significaría que existiría un elemento $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, pero el conjunto vacío no contiene ningún elemento, por lo que se llegaría a una contradicción.

3.1.2 Ejemplo

Demuéstrese que para cualquier par de conjuntos

$$A = B \text{ si y sólo si } A \supset B \text{ y } B \supset A.$$

Solución

Si $A = B$, entonces claramente $A \supset B$ y $B \supset A$. Recíprocamente, si $A \supset B$ y $B \supset A$, entonces tenemos que todo elemento de A está en B y

que todo elemento de B está en A, luego A y B son iguales.

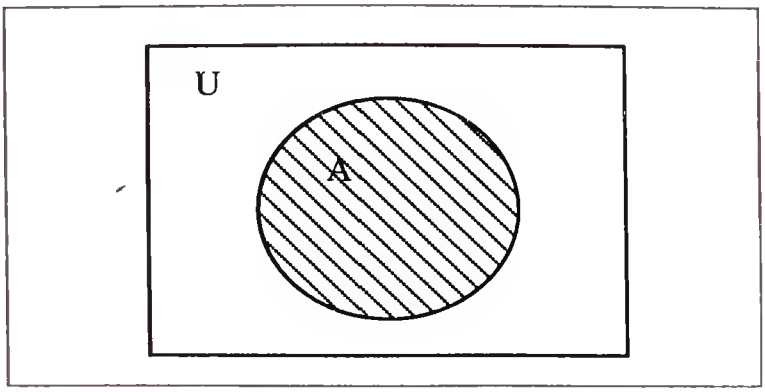
Cuando se trabaja con una familia de conjuntos, hay que tener en cuenta que existe un *conjunto universal* U (que puede variar en cada familia), tal que cualquier otro conjunto A que se mencione en la discusión se puede considerar, si no se dice otra cosa, que es un subconjunto de U.

Si se trabaja con los números naturales y se mencionan los conjuntos A y B, hay que suponer que son subconjuntos de los números naturales, y no subconjuntos de un conjunto de libros o discos. En el caso de números naturales el conjunto universal es **N**.

Si en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} se conociera que el conjunto universal es el de los números enteros, entonces estaría bien definido el conjunto A como

$$A=\{ x \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

- En la mayoría de los problemas el conjunto universal será evidente por el contexto del problema. En los diagramas de Venn, el conjunto universal U se indicará por un rectángulo, mientras que los conjuntos contenidos en U se indicarán con círculos, como muestra la figura.



Un conjunto es finito si tiene n elementos distintos para algún número natural n. En este caso, a n se le llama el cardinal de A y se denota por $|A|$.

Si $A = \{3, 4, 5, 7, 8\}$, entonces $|A| = 5$.

Si $A = \{ y^2 \mid y \text{ es un número natural } y^2 < 20 \}$ se tiene que $A = \{1, 4, 9, 16\}$, luego $|A| = 4$.

Si A es un conjunto, entonces al conjunto de todas los subconjuntos de A se le denomina *conjunto de partes de A* y se indica por P(A).

Si $A = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto de partes de A es el conjunto

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Luego el cardinal de A, $|A| = 3$, y el de partes de A, $|P(A)| = 2^3 = 8$.

3.1.3 Ejemplo

Calcúlese el cardinal del conjunto y del conjunto de partes en cada uno de los siguientes conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ es un número natural}, 2x + 7 = 3\}.$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un número entero}, 3x + 5 = -1\}.$$

$$C = \{x \mid x \text{ es un número entero}, x^2 + 4 = 13\}.$$

Solución

Si $2x + 7 = 3$, entonces $2x = -4$, así $x = -2$, como -2 no es un número natural se tiene $A = \varnothing$, por lo tanto $|A| = |\varnothing| = 0$ y $P(A) = \{\varnothing\}$, así $|P(A)| = 2^0 = 1$.

Si $3x + 5 = -1$, entonces $3x = -6$ y así $x = -2$. Como -2 es un número entero $B = \{-2\}$, luego $|B| = 1$ y $P(A) = \{\varnothing, \{-2\}\}$, así $|P(A)| = 2^1 = 2$.

Si $x^2 + 4 = 13$, entonces $x^2 = 9$, y así $x = \pm 3$, luego $C = \{+3, -3\}$, y así $|C| = 2$ y $P(A) = \{\varnothing, \{+3\}, \{-3\}, \{+3, -3\}\}$, así $|P(A)| = 2^2 = 4$.

- Se puede observar que el cardinal de las P(A), $|P(A)|$ es siempre $2^{|A|}$.

3.1.4 Ejemplo

Encuéntrese, en cada apartado, el conjunto con el menor número de elementos posible, que contenga a los conjuntos dados como subconjuntos.

(a) $\{a, b, c\}, \{b, c, e, f\}, \{c, e, g\}$.

(b) $\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \varnothing$.

Solución

En el caso (a) el conjunto será

$$\{a, b, c, e, f, g\},$$

en el caso (b) el conjunto será

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

3.1.5 Ejemplo

Sea $A = \{ x \mid x \text{ es un entero y } x^2 < 25 \}$. Responder si lo siguiente es verdadero o falso.

(a) $A \supset \{0, 1, 2, 5\}$.

(b) $A \supset \{-3, -2, -1\}$.

(c) $A \supset \varnothing$.

(d) $A \supset \{x \mid x \text{ entero positivo con } x < 4\}$.

(e) $\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \supset A$.

Solución

(a) Es falso puesto que $5 \notin A$.

(b) Es verdadero.

(c) Es verdadero pues el $\varnothing$ es siempre un subconjunto de cualquier

conjunto.

(d) Es verdadero.

(e) Es falso puesto que -3 pertenece a A y $-3 \notin \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Notas Históricas

La teoría de conjuntos fue creada por Cantor (1845-1918). Desde 1872 hasta finales del siglo XIX, la noción de conjunto era intuitiva (Considérense las definiciones dadas por Cantor y Dedekind al comienzo del Tema). Esta utilización de los conjuntos sin la ayuda de reglas precisas llevó rápidamente a la aparición de paradojas. Estas paradojas no eran nuevas, ya en el siglo IVa.C., un personaje de Eubulides que siempre miente, declara que está diciendo una mentira. ¿Es esta frase la expresión de la verdad? Cualquiera que sea la respuesta se llega a una contradicción. Una paradoja parecida aparece en El Quijote de Cervantes.

La primera paradoja estrictamente matemática aparecida fue dada por Cantor, pero B.Russell (1872-1970) es el autor de la mas famosa: Supongamos que se distingue entre conjuntos "normales" y "anormales"; por normales se entiende aquellos conjuntos que no son elementos de si mismos. Por ejemplo, el conjunto de los árboles en un campo es un conjunto "normal", pues tal conjunto no es ningún árbol. Los conjuntos "anormales" son aquellos que se contienen a si mismos: El conjunto de los conjuntos es "anormal" pues a su vez es un conjunto. Russell se preguntó por la naturaleza del conjunto de todos los conjuntos normales. ¿era normal o anormal?. Si era normal no se contenía a sí mismo, con lo que formaba parte del conjunto de los conjuntos normales, y, por lo tanto, era anormal pues se contenía a si mismo. Contradicción. Si era anormal, se contenía a si mismo, con lo cual formaba parte del conjunto de los conjuntos normales y era por tanto normal. Contradicción de nuevo. Esta ingeniosísima paradoja mantuvo en vilo a los matemáticos varios años y motivó la axiomatización de la teoría de conjuntos. La primera axiomatización de la teoría de conjuntos se debe a Zermelo (1817-1953) en 1908; fue mejorada por Fraenkel (1891-1965) en 1922 y con ella las paradojas antes mencionadas desaparecen ya que uno de los axiomas dice "Ningún conjunto es elemento de sí mismo".

3.2 Operaciones con conjuntos

En esta sección se estudiarán varias operaciones que permiten crear conjuntos a partir de conjuntos dados y desempeñan un papel importante en muchos temas posteriores.

Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto universal U, se define su *unión* como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A ó a B y se indica por $A \cup B$,

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \}.$$

- Téngase en cuenta que si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$ ó pertenece a ambos.

- Se puede ilustrar la unión de dos conjuntos con un diagrama de Venn como sigue: Si A y B son dos conjuntos dados por la figura 1, entonces $A \cup B$ es el conjunto de puntos en la región sombreada como lo indica la figura 2.

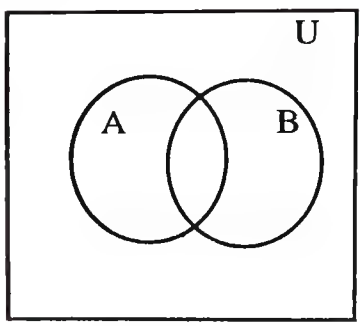


Figura 1

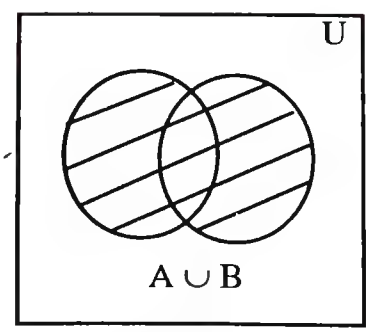


Figura 2

Si U = {1, 2, 3, 4,..., 10}, A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {3, 4, 5, 6} y C = {1, 2, 6, 7, 9}, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \text{ y}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}.$$

- Obsérvese que A y B son distintos pero, en cambio, $A \cup C = B \cup C$.

Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto universal U, se define su intersección como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B y se indica por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}.$$

- Se puede ilustrar la intersección de dos conjuntos con un diagrama de Venn como sigue. Si A y B son dos conjuntos dados por la figura 3, entonces $A \cap B$ es el conjunto de puntos en la región sombreada, como lo indica la figura 4.

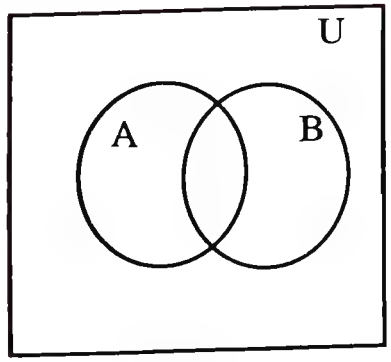


Figura 3

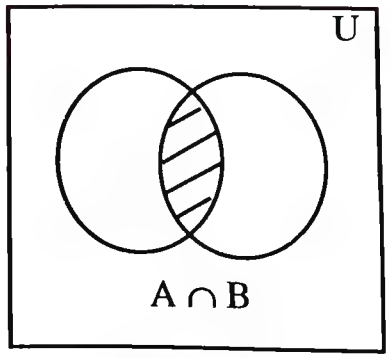


Figura 4

Si U, A, B y C son los conjuntos anteriores. Entonces

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}, A \cap C = \{1, 2\}, B \cap C = \{6\}.$$

- Las operaciones unión e intersección se pueden generalizar para tres o más conjuntos. Así pues:

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C\},$$
$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\}.$$

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, e, f\}$ y $C = \{a, c, d, e, f\}$, $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $A \cap B \cap C = \{a\}$.

Si A y B son dos conjuntos se define el *complementario* de B con respecto a A, como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B y se indica por A - B.

Si A es el conjunto universal U, entonces a U - B se le llama el *complemento* de B y se indica por B^c.

- Por comprensión se puede escribir

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\} \text{ y } B^c = \{x \in U \mid x \notin B\}.$$

- Se puede ilustrar el complementario de B con respecto a A y el complemento de B con diagramas de Venn como se indican en las figura 5 y 6, por los conjuntos de puntos de las regiones sombreadas.

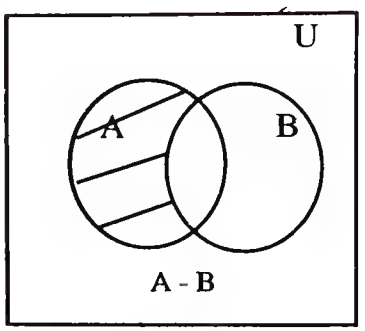


Figura 5

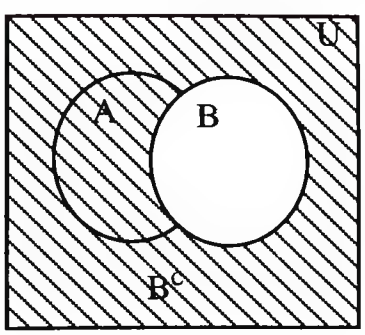


Figura 6

Si $U = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 4, 8, 9\}$. Entonces $A - B = \{1, 6\}$, $B - A = \{9\}$, $A^c = \{3, 5, 7, 9\}$ y $B^c = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

3.2.1 Ejemplo

Sea $U = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 5, 9\}$, $C = \{ x \mid x$ es un número natural y $x^2 \leq 25\}$ y $D = \{7, 8\}$. Calcúlese (a) $A \cup B$. (b) $A - B$. (c) $(A \cup B)^c$. (d) $(B \cup C) \cap D^c$. (e) $(A \cap B) \cup (B - A)$.

Solución

(a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

(b) $A - B = \{1, 6, 8\}$.

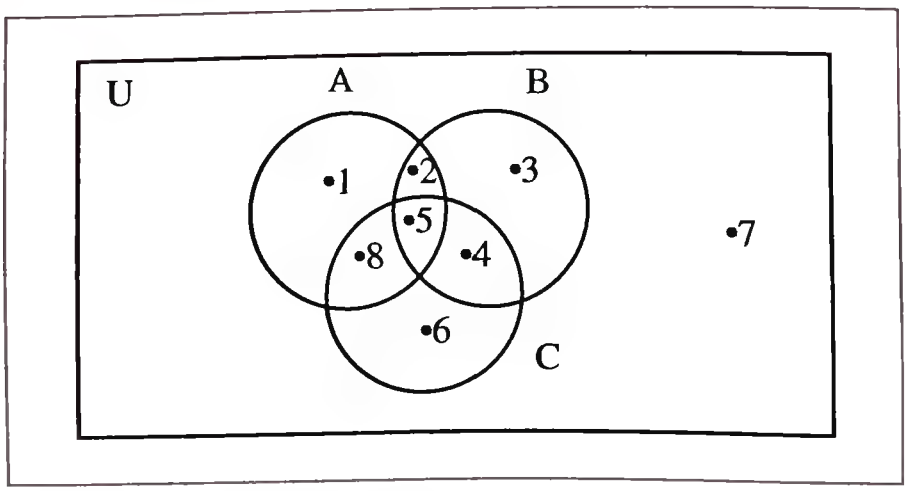
(c) $(A \cup B)^c = \{3, 7\}$.

(d) Como $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, y puesto que $D^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ entonces $(B \cup C) \cap D^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$.

(e) Como $A \cap B = \{2, 4\}$ y $B - A = \{5, 9\}$ entonces $(A \cap B) \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 9\} = B$.

3.2.2 Ejemplo

Dado el diagrama de Venn



responder si lo siguiente es verdadero o falso.

(a) $5 \in A \cap B \cap C$.

(b) $4 \in (B - A) \cup C^c$.

(c) $2 \in (B \cap A) \cap C^c$.

(d) $6 \in (C - A) \cup (C - B)$.

(e) $1 \in (C - A) \cup B$.

(f) $3 \in (A \cap B \cap C) \cup ((B - A) \cap (B - C))$.

(g) $7 \in A^c \cap (B - A)$.

Solución

(a), (b), (c), (d) y (f) son verdaderos, (e) y (g) son falsos.

Notas Históricas

Las operaciones con conjuntos que se han definido cumplen muchas propiedades algebraicas que se satisfacen en los números reales, la mayoría de ellas fueron establecidas por el matemático ingles George Boole (1815-1864) que formalizó un algebra con conjuntos, presentado en la obra " Investigation of the Law of Throught", que publicó en 1854.

Dados dos conjuntos A y B, los pares ordenados de la forma (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$ forman un tercer conjunto que se designa por $A \times B$ y se denomina *producto cartesiano* de A por B (en este orden).

- Por ser los elementos de $A \times B$ pares ordenados, se tiene que si (x, y), $(x', y') \in A \times B$, entonces $(x, y) = (x', y')$ si y sólo si $x = x'$ e $y = y'$.

Este concepto se generaliza a un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. El conjunto producto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es el formado por todas las n-tuplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$.

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces:

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$,

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$,

$B^2 = B \times B = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$,

$B^3 = B \times B \times B = \{(3, 3, 3), (3, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 4, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 3), (4, 3, 4)\}$.

- Obsérvese que en el ejemplo anterior $(1, 4) \in A \times B$ y no pertenece a $B \times A$. En general, salvo cuando $A = B$, se tiene que $A \times B$ es distinto de $B \times A$.

Si consideramos el conjunto de los números reales **R**,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \},$$

que se conoce como el plano real de la geometría, en él las figuras geométricas como los triángulos, cuadrados, circunferencias o rectas son subconjuntos importantes. Asimismo, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ representa el espacio euclideo tridimensional, donde las esferas y planos, son subconjuntos importantes.

3.3 Aplicaciones

Cuando se mira el escaparate de una tienda se ven una serie de objetos y unos carteles con el precio de cada uno de estos objetos. Si designamos por A el conjunto de los objetos, y por B el conjunto de los precios, entonces la asignación de un precio a cada objeto establece una aplicación entre el conjunto A y el B.

Una aplicación es una relación (o correspondencia) entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo. Formalmente se puede decir de la siguiente forma:

Sean A y B dos conjuntos. Una aplicación de A en B es una terna formada por tres conjuntos $f = (C, A, B)$ donde C es un subconjunto de $A \times B$, tal que para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$, tal que $(a, b) \in C$.

Si consideramos A como el conjunto de los habitantes de una ciudad y como B el conjunto de números entre 0 y 200, entonces la asignación a cada habitante de su edad define una aplicación entre los conjuntos A y B.

Si A es el conjunto de las vocales, B el conjunto de los nueve primeros números naturales y C el subconjunto de A x B

$$C = \{(a, 1), (e, 3), (i, 4), (o, 4), (u, 7)\}.$$

Entonces el conjunto C determina una aplicación f = (C, A, B) entre el conjunto A y el B, en el cual a cada vocal se le asigna un número.

Si f =(C, A, B) es una aplicación, entonces (x, y) $\in$ C se suele escribir simbólicamente y = f(x), que se lee " y es la imagen por f de x". La aplicación se escribe de la forma $f : A \to B$.

En el último ejemplo se puede decir que $f: A \to B$, viene definida de la siguiente forma

$$f(a) = 1,\ f(e) = 3,\ f(i) = 4,\ f(o) = 4,\ f(u) = 7.$$

Si $A = \mathbf{N}$ y $B = \mathbf{N}$ entonces la aplicación asociada a $C=\{(n, n^2) \mid n \in \mathbf{N}\}$ se puede definir de la siguiente forma, dependiendo de una variable x, $f(x) = x^2$, que es la aplicación que asigna a cada número natural su cuadrado.

Si $A = \mathbf{Z}$ y $B = \mathbf{Z}$ entonces la aplicación f definida de A en B $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, por $f(x) = 2.x$ asocia a cada número entero un número par.

Sea A un conjunto; llamaremos aplicación identidad de A, a la aplicación de A en A que asigna a cada elemento de A el mismo elemento; normalmente se la suele denotar por Id_A, así se podrá definir la *aplicación identidad* como $Id_A(x) = x$ para todo x de A.

Sean f y g dos aplicaciones de A en B f, g : A $\to$ B, diremos que f *es igual a* g y escribiremos f = g si f(x) = g(x) para todo x de A.

Sea f una aplicación de A en B y sea X un subconjunto de A. Se denomina *imagen de* X *por* f y se designa por f(X) al subconjunto de B definido por $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$. Con otras palabras, f(X) es el conjunto de las imágenes de los elementos de X por la aplicación f.

Sea Y un subconjunto de B. Se denomina *imagen inversa* de Y por f y se designa por $f^{-1}(Y)$ al subconjunto de A definido por

$$f^{-1}(Y) = \{ x \mid f(x) \in Y \}.$$

Si $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ y $B = \mathbf{N}$, entonces dada la aplicación $f(x) = 2x + 1$, se tiene $f(A) = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.

Si $Y = \{2, 3, 4, 5\}$, entonces $f^{-1}(Y) = \{1, 2\}$; si $T = \{3, 5\}$, entonces $f^{-1}(T) = \{1, 2\}$ y si $W = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces $f^{-1}(W) = \varnothing$.

• Obsérvese que si $f: A \to B$ es una aplicación y $X \neq \varnothing$ es un subconjunto de A entonces $f(X) \neq \varnothing$. En cambio si Y es un subconjunto de B, $f^{-1}(Y)$ puede ser el vacío.

3.3.1 Ejemplo

Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Determínese f(A) para los siguientes subconjuntos A de **R**.

(a) $A = \{2, 3\}$, (b) $A = [-2, 2]$, (c) $A = (-3, 2)$.

Solución

(a) Si $A = \{2, 3\}$, entonces $f(A) = \{4, 9\}$.

(b) Si $A = [-2, 2]$, entonces $f(A) = \{x^2 \mid x \in [-2, 2]\} = [0, 4]$.

(c) Si $A = (-3, 2)$, entonces $f(A) = \{x^2 \mid x \in (-3, 2)\} = [0, 9)$.

• Son frecuentes en los medios de comunicación expresiones del tipo: El consumo de gasolina de una moto está en función de la velocidad de la misma. La factura mensual del teléfono está en función de los pasos del contador. El precio del billete de avión está en función de la distancia que existe entre el origen y el destino.

Todas estas frases establecen una dependencia entre determinadas magnitudes, de tal manera que, fijadas unas magnitudes (velocidad, pasos de contador, distancia), podemos hallar, con arreglo al criterio que se establezca, los valores correspondientes de la otra magnitud.

A las aplicaciones de este tipo se les suele llamar también *funciones*.

Así la aplicación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x - 4$, que a cada número real lo que hace es restarle 4, se le puede llamar también función de **R** en **R**.

Sabemos que el espacio recorrido por un coche a velocidad constante depende sólo del valor del tiempo, y es igual a la velocidad por el tiempo. Si nosotros sabemos que un coche va a 60 Km por hora, entonces la aplicación que da el espacio recorrido es una función de **R** en **R** definida por $f(t) = 60.t$, donde t es el tiempo medido en horas.

En los dos ejemplos anteriores se puede observar que existen unas variables que se fijan previamente x o t, a estas variables se les llaman *variables independientes*, y a las variables que se deducen de las anteriores: x - 4, 60. t se les llama *variables dependientes* ya que estas últimas dependen de los valores de las otras variables previamente fijados.

- Para determinar completamente una función es necesario conocer: El conjunto inicial donde toma valores la variable independiente. El conjunto final donde toma valores la variable dependiente. La regla que permite asociar a cada elemento del conjunto inicial su correspondiente imagen en el final.

Así, dada la función f de **R** en **R** definida por $f(x) = |x|$, se tiene que esta función está bien definida porque conocemos el conjunto inicial **R**, el conjunto final **R** y la regla que la determina: asociar a cada número real su valor absoluto. Obsérvese que $f(\mathbf{R})$ es el conjunto de los números reales positivos con el cero, esto es $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ que, como se observa es un subconjunto del conjunto final.

Notas Históricas

La palabra función fue introducida en 1694 por G. W. Leibniz (1646-1716) para denotar una cantidad asociada a una curva. Alrededor de 1718, J. Bernouilli (1667-1748) consideró la función como una expresión algebraica formada por constantes y una variable. Las ecuaciones o fórmulas con constantes y variables aparecieron después con L. Euler (1707- 1783). En el trabajo realizado hacia 1734 por Euler y A. Clairant (1713-1765) se encuentra también la notación f(x) que todavía se usa en la actualidad. P.G.L. Dirichlet (1805-1859) estableció una formulación más rigurosa de los conceptos de variable, función y correspondencia entre la variable independiente x y la dependiente y cuando y = f(x). El estudio de Dirichlet destacó la relación entre dos conjuntos de números. Con el desarrollo de la teoría de conjuntos durante los siglos XIX y XX, se estableció la generalización de función como un tipo especial de aplicaciones.

Se dice que una aplicación $f: A \to B$ es inyectiva cuando a cada dos elementos distintos de A le hace corresponder dos elementos distintos de B, es decir, cuando

$$x, y \in A \quad \text{con} \quad f(x) = f(y) \quad \text{implica} \quad x = y.$$

La aplicación $Id_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definida por $Id_N(n) = n$ es una aplicación inyectiva ya que si $Id_N(x) = Id_N(y)$ entonces $Id_N(x) = x = y = Id_N(y)$.

La aplicación $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por $f(n) = 2n + 3$ es una aplicación inyectiva puesto que si

$$f(x) = f(y), \text{ entonces } 2x + 3 = 2y + 3, \text{ luego } x = y.$$

La aplicación definida anteriormente $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por $f(x) = |x|$ no es inyectiva puesto que $f(-3) = f(3) = 3$.

3.3.2 Ejemplo

Para cada una de las siguientes aplicaciones determínese en qué caso la aplicación es inyectiva.

(a) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = 2x^3 + 1$.

(b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2^x$.

Solución

(a) f es inyectiva puesto que si $f(x) = f(y)$, se tiene que $2x^3 + 1 = 2y^3 + 1$, operando tenemos que $x^3 = y^3$, luego $(x / y)^3 = 1$, y así $x / y = 1$, por lo tanto $x = y$.

(b) f es inyectiva puesto que si $f(x) = f(y)$, se tiene que $2^x = 2^y$, entonces $2^x / 2^y = 1$, por lo tanto $2^{x-y} = 1$, así $x - y = 0$, luego $x = y$.

Se dice que una aplicación $f: A \to B$ es *sobreyectiva* (o *suprayectiva*) cuando todo elemento de B tiene al menos un original en A, es decir, cuando para cada $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

- Obsérvese que una aplicación $f: A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $f(A) = B$.

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$ entonces la aplicación $f: A \to B$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$, es sobreyectiva, puesto que $f(A) = \{a, b, c\} = B$, pero en cambio la aplicación $g: A \to B$, definida por $g(1) = b$, $g(2) = c$, $g(3) = c$, $g(4) = b$, no es sobreyectiva puesto que $g(A) = \{b, c\} \neq B$.

La aplicación $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$ es sobreyectiva puesto que dado un elemento $y \in \mathbf{R}$, se tiene que existe un $x \in \mathbf{R}$, con $f(x) = y$. Veamos cual es el x, como $f(x) = 2x + 5 = y$, entonces $2x = y - 5$, por lo tanto si tomamos como $x = (y - 5) / 2$, se tiene que

$$f(x) = f((y - 5) / 2) = 2(y - 5) / 2 + 5 = y.$$

La aplicación $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$, no es sobreyectiva, puesto que -3 no se puede obtener como imagen de x para ningún

número real x, puesto que si $f(x) = x^2 = -3$, se obtendría que el cuadrado de un número real es negativo, lo que es una contradicción.

3.3.3 Ejemplo

Encontrar todas las aplicaciones sobreyectivas que se pueden definir de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 2\}$.

Solución

Las aplicaciones sobreyectivas que se pueden definir son las siguientes

$f_1(a) = 1$	$f_1(b) = 2$	$f_1(c) = 1$
$f_2(a) = 1$	$f_2(b) = 1$	$f_2(c) = 2$
$f_3(a) = 1$	$f_3(b) = 2$	$f_3(c) = 2$
$f_4(a) = 2$	$f_4(b) = 2$	$f_4(c) = 1$
$f_5(a) = 2$	$f_5(b) = 1$	$f_5(c) = 2$
$f_6(a) = 2$	$f_6(b) = 1$	$f_6(c) = 1$

Por lo tanto hay seis aplicaciones sobreyectivas.

Se dice que una aplicación $f : A \rightarrow B$ es *biyectiva* cuando es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces la aplicación f definida por $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = c$ es biyectiva.

Si $f: \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N}$ es la aplicación definida por $f(x) = x + 1$, entonces f es inyectiva puesto que si $f(x) = f(y)$, entonces $x + 1 = y + 1$, así $x = y$. Además f es sobreyectiva ya que dado $y \in \mathbf{N}$, se tiene que $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$. Por lo tanto f es biyectiva.

3.3.4 Ejemplo

Para cada una de las siguientes aplicaciones $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ determínese si la aplicación es inyectiva y si es sobreyectiva. Si la aplicación no fuera sobreyectiva, determínese la imagen $g(\mathbf{R})$

(a) $g(x) = 4x + 7$.

(b) $g(x) = x^2 + x$.

Solución

(a) $g(x)$ es inyectiva, puesto que si $g(x) = g(y)$, entonces $4x + 7 = 4y + 7$, luego $x = y$.

$g(x)$ es sobreyectiva, ya que dado $y \in \mathbf{R}$, se tiene que $f((y - 7)/4) = y$.

(b) $g(x)$ no es inyectiva, puesto que $g(0) = 0$ y $g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$.

$g(x)$ no es sobreyectiva ya que dado y se tiene que si $f(x) = y$, entonces $x^2 + x = y$, así $x^2 + x - y = 0$, luego $x = \dfrac{(-1) \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$, pero $\sqrt{1 + 4y}$ es un número real sólo si $1 + 4y \geq 0$, luego $4y \geq -1$, $y \geq -1/4$, por lo tanto no todo número real se puede obtener como imagen por uno de g, así por ejemplo el -1 no se puede obtener. La imagen de g es

$$g(\mathbf{R}) = \{ y \in R \mid y \geq -1/4 \}.$$

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, se define la aplicación compuesta, denotada por $g \circ f : A \to C$, como la aplicación definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para cada $x \in A$.

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{w, x, y, z\}$, con $f : A \to B$ y $g : B \to C$, dadas por

$$f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = b,\ f(4) = c.$$
$$g(a) = x,\ g(b) = y,\ g(c) = z.$$

Entonces

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(a) = x,\ g \circ f(2) = g(f(2)) = g(a) = x,$$
$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(b) = y,\ g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = z.$$

Sean $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ las aplicaciones definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 5$. Entonces

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5, \text{ mientras que}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

- En este ejemplo se puede calcular $g \circ f(x)$ y $f \circ g(x)$, pero en cambio $g \circ f(2) = 9 \neq 49 = f \circ g(2)$.

Sea $f : A \to B$ una aplicación, se dice que f es *invertible* si existe una aplicación $g : B \to A$, tal que $g \circ f(x) = Id_A(x)$ y $f \circ g(x) = Id_B(x)$, a la aplicación g se le llama *inversa* de A.

Si f y g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definidas por $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = (x - 5) / 2$. Entonces:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = [(2x + 5) - 5] / 2 = x,$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f((x - 5) / 2) = 2[(x - 5) / 2] + 5 = x,$$

luego $g \circ f(x) = Id_{\mathbf{R}}(x)$ y $f \circ g(x) = Id_{\mathbf{R}}(x)$.

- En el ejemplo anterior las funciones f y g tienen inversas, se podría comprobar fácilmente que f y g son biyectivas; en general se tiene que f es invertible si y sólo si f es biyectiva.

3.4 Ejercicios

1.- ¿Cúales de los siguientes conjuntos son no vacíos? En el caso de que no lo fueran, ¿cúal es su cardinal y el de su conjunto de partes?

$$A = \{ x \mid x \text{ es un número natural, } 2x + 3 = 1 \}.$$
$$B = \{ x \mid x \text{ es un número entero, } 5x + 3 = 12 \}.$$
$$C = \{ x \mid x \text{ es un número entero, } x^2 - 1 < 77 \}.$$

2.- Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$

y $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Calcúlese

(a) $(A \cup B)^c \cap C$.

(b) $(A - B) \cap C^c$.

(c) $(A - B)^c \cup (B - C)^c$.

(d) $(B \cup C) \cap (A \cap B)^c$.

3.- Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$. Determínese $f(A)$ para cada uno de los siguientes subconjuntos A de **R**.

(a) $A = \{-3, -1, 0, 2, 5, \sqrt{16}\}$.

(b) $A = (-2, 3)$.

(c) $A = (-4, 7]$.

4.- Encuéntrense todas las aplicaciones inyectivas que se pueden definir de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c, d\}$.

5.- Sean $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ las aplicaciones definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x + 5$. Estúdiese si estas aplicaciones son biyectivas y calcúlese $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$, $g \circ g(x)$, $g \circ f \circ g(x)$.

TEMA 4

Combinatoria

En este tema se van a estudiar algunas técnicas básicas para contar elementos de conjuntos diversos de objetos. Estas técnicas están relacionadas principalmente con problemas de cálculo de probabilidades, como veremos en la sección siguiente, pero no exclusivamente. En todos los ejemplos que vamos a ver será necesario contar cúantos elementos poseen los conjuntos implicados en cada problema particular. En los ejemplos elementales esto será fácil de calcular, pero existen conjuntos finitos para los que el cálculo del número de elementos no es trivial.

4.1 Principios de Adición y de Multiplicación

En esta sección se van a estudiar dos principios básicos para contar elementos de un conjunto: El principio de Adición y el de Multiplicación. Dichos principios están motivados por problemas como los siguientes:

- Un restaurante tiene una carta que consta de cuatro primeros platos y tres segundos. ¿Cúantos menús formados por dos platos, uno del primer grupo y otro del segundo, se pueden confeccionar?

- Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces. ¿De cúantas maneras se puede obtener una , dos o tres caras?

- ¿Cúantos grupos de seis cartas se pueden formar con una baraja de 40 cartas, si cada carta puede ser un elemento cualquiera de la baraja?

Sea S un conjunto finito no vacío. Se designará por |S| al cardinal de S, es decir,al número de elementos de S. En particular $|\varnothing| = 0$.

Principio de Adición

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para cada $i \neq j, i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

El Principio de Adición se puede expresar, en un lenguaje más informal pero más intuitivo, de la siguiente manera: Si hay r_1 objetos diferentes en A_1, r_2 objetos en A_2 , ..., r_n objetos en A_n , y los diferentes conjuntos no tienen elementos comunes, entonces el número de formas de elegir un objeto de uno de los n conjuntos es $r_1 + r_2 + ... + r_n$.

4.1.1 Ejemplo

Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces. ¿De cúantas maneras se puede obtener una , dos o tres caras?

Solución

Designemos los resultados de obtener cara o cruz, respectivamente por C ó +. Sean A_1, A_2 y A_3 los conjuntos formados por los resultados "obtener exactamente una cara", "obtener exactamente dos caras" y "obtener exactamente tres caras", es decir,

$$A_1 = \{(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)\},$$

$$A_2 = \{(+, C, C), (C, +, C), (C, C, +)\},$$

$$A_3 = \{(C, C, C)\}.$$

Puesto que los conjuntos son disjuntos dos a dos, aplicando el Principio de Adición se tiene:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3 + 3 + 1 = 7.$$

4.1.2 Ejemplo

En el lanzamiento de dos dados, ¿de cúantas maneras se puede obtener que la suma de ambos resultados sea siete u ocho?

Solución

Al resultado del lanzamiento de dos dados le asociamos un par ordenado (a, b) donde "a" representa el resultado del primer dado y "b" el resultado del segundo. Obviamente a, b$\in$ {1, 2, ..., 6}. Sean A y B los conjuntos de pares ordenados que tienen como resultado siete y ocho respectivamente. Entonces,

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

Observamos que $A \cap B = \varnothing$. Por el Principio de Adición

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

es decir,

$$|A \cup B| = 6 + 5 = 11.$$

Principio de Multiplicación

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \, |A_2| \, ... \, |A_n|.$$

Donde $\times$ denota el producto cartesiano de conjuntos.

- Forma práctica del Principio de Multiplicación.

El resultado anterior se puede exponer de un modo informal, pero más práctico, como sigue: Supongamos que un experimento consiste en seleccionar n objetos de manera que primero se elige un elemento de un subconjunto de m_1 objetos, posteriormente se elige otro de un subconjunto de m_2 objetos y así sucesivamente. Para la elección n-ésima se dispone de m_n objetos. Entonces, la selección se puede realizar de

$$m_1 m_2 ... m_n$$

formas diferentes.

- En muchas aplicaciones el conjunto de elecciones para el n-ésimo objeto puede ser dificil de precisar, pues no puede determinarse hasta después de haber hecho las elecciones precedentes, sin embargo al aplicar el Principio de Multiplicación no es necesario conocer el conjunto de elecciones posibles para el n-ésimo objeto, sino únicamente el número de elecciones posibles para el n-ésimo objeto.

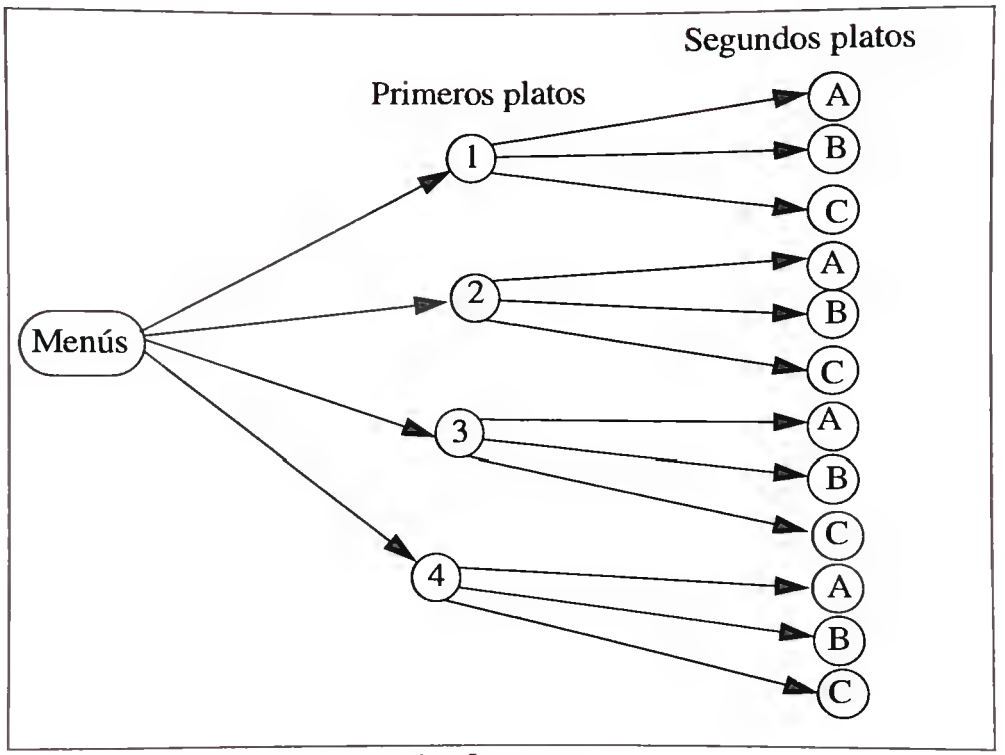
4.1.3 Ejemplo

Un restaurante tiene una carta que consta de cuatro primeros platos y tres segundos. ¿Cúantos menús formados por dos platos, uno del primer grupo y otro del segundo, se pueden confeccionar?

Solución

Denotemos por 1, 2, 3 y 4 los primeros platos de la carta y por A, B y C los segundos platos.

Construyamos el siguiente diagrama en forma de arbol:



luego los menús que se pueden formar son

1A, 1B, 1C
2A, 2B, 2C
3A, 3B, 3C
4A, 4B, 4C

Por tanto hay 12 posibilidades. Este resultado se puede obtener de forma más rápida aplicando el Principio de Multiplicación. En este caso A_1 consta de cuatro elementos y A_2 de tres. El conjunto de pares distintos

(Primer plato, Segundo plato)

será, teniendo en cuenta que no hay platos comunes:

$$|A_1 \times A_2| = |A_1||A_2| = 4 \,.\, 3 = 12.$$

4.1.4 Ejemplo

Cúantos grupos de seis cartas se pueden formar con una baraja de 40 cartas, si cada carta puede ser un elemento cualquiera de la baraja?

Solución

Es un ejemplo de lo que se denomina *muestreo con reposición*. Sea A el conjunto formado por las 40 cartas. Sacamos una carta y la apuntamos como primera componente del grupo de seis. Devolvemos la carta a la baraja y volvemos a sacar otra carta y la apuntamos como segunda componente y así sucesivamente, hasta que se han completado las seis extracciones. De esta forma una misma carta puede aparecer varias veces en el grupo de seis cartas. Aplicando el Principio de Multiplicación, según fue descrito en su forma práctica, se puede elegir la primera carta de 40 formas distintas, la segunda de otras 40 formas y así sucesivamente; luego el número de grupos de seis cartas que se pueden obtener es

$$40 \,.\, 40 \,.\, 40 \,.\, 40 \,.\, 40 \,.\, 40 = 4096000000.$$

4.1.5 Ejemplo

Se dispone de una urna que contiene 40 bolas y se extraen 4 bolas sin devolver la bola extraída. Calcular el número de formas de obtener 4 bolas.

Solución

Muestreo sin reposición. Aplicando el Principio de Multiplicación, en su forma práctica, se tiene que la primera bola se puede elegir entre 40 diferentes; como la bola extraída no se devuelve a la urna, para la segunda extracción disponemos de 39 bolas y , por lo tanto, de 38 y 37 para las otras extracciones. Así el número buscado será:

$$40 \,.\, 39 \,.\, 38 \,.\, 37 = 2193360.$$

4.1.6 Ejemplo

¿Cúantos números naturales n (distintos) existen que satisfagan $5000 < n < 10000$ y tengan todas sus cifras diferentes?

Solución

Puesto que n está acotado por 5000 y 10000 debe ser un número de 4 cifras. Como $5000 < n$, la cifra de las unidades de millar será 5, 6, 7, 8 ó 9. Luego para los millares disponemos de cinco cifras. Una vez elegida las cifras de las unidades de millar disponemos de 9 cifras para las centenas (los diez dígitos menos el ya elegido par las unidades de millar). Análogamente disponemos de 8 cifras para las decenas y de 7 para las unidades. Por lo tanto habrá

$$5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$$

números que satisfagan las condiciones del enunciado.

4.2 Variaciones, Permutaciones y Combinaciones

En esta sección se estudian las distintas colecciones que se pueden formar, según una ley dada, con elementos de un conjunto finito. En particular estableceremos los conceptos de variación, permutación y combinación y deduciremos las fórmulas para calcular sus valores.

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$.

Una *variación de orden r* de A es una lista ordenada $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos de A distintos dos a dos. Diremos que dos variaciones son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra, o bien si las dos listas contienen los mismos elementos en distinto orden.

• Designaremos el número de variaciones de orden r del conjunto de n elementos A por V(n, r). En ocasiones se utiliza la frase: V(n, r) es el número de variaciones de n elementos tomados de r en r.

4.2.1 Ejemplo

Sea A = {a, b, c}. Las posibles palabras de dos letras que se pueden formar con los elementos de A, sin que se repita ninguna de las letras, son las variaciones de orden 2 del conjunto A, y éstas son precisamente

ab, ba, ac, ca, bc, cb,

luego su número es $V(3, 2) = 6$.

• Si $(a_1, a_2, ..., a_r)$ es una variación de orden r de A, entonces podemos asociarle la aplicación inyectiva

$$\sigma : \{1, 2, ..., r\} \to A,$$

definida por $\sigma(i) = a_i$, para $1 \leq i \leq r$. Además a cada aplicación inyectiva

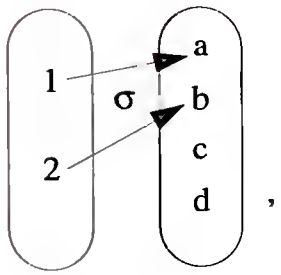
$$\sigma : \{1, 2, ..., r\} \to A,$$

le podemos asociar la variación $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r))$.

Por lo tanto es equivalente el definir una variación de orden r como una lista ordenada $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos de A distintos, o bien mediante una aplicación inyectiva $\sigma : \{1,2, ..., r\} \to A$.

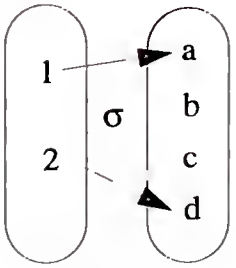
4.2.2 Ejemplo

Sea A = {a, b, c, d}. Cada una de las parejas de elementos ab, ad, ac, dc es una variación de orden dos de A, y las ternas abc, abd, bad son variaciones de orden tres de A. Dichas variaciones se pueden representar mediante aplicaciones inyectivas de la siguiente forma:



(ab) :

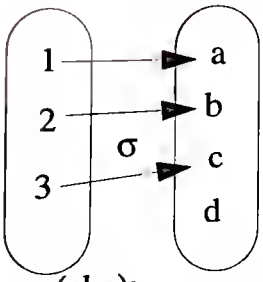
$\sigma(1) = a, \sigma(2) = b$



.... etc.

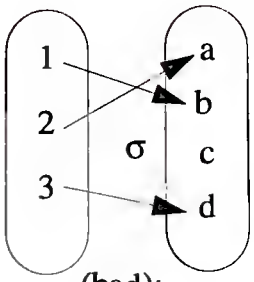
(ad) :

$\sigma(1) = a, \sigma(2) = d$



(abc):

$\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$



... etc.

(bad):

$\sigma(1) = b, \ \sigma(2) = a, \ \sigma(3) = d$

La función factorial, n! (para enteros no negativos)

Sea n un número entero no negativo, se define el factorial de n, n!, de la siguiente forma:

i) $0! = 1$

ii) Si $n > 0$, entonces $n! = 1 . 2 . 3 . \ldots . (n-1) . n = n . (n-1)!$

4.2.3 Ejemplo

$5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5 . 4! = 5 . 24 = 120.$

4.2.4 Ejemplo

Probar que el número de biyecciones distintas de $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ en $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ es n!.

Solución

Para construir una biyección $f : A \rightarrow B$ se debe indicar la imagen de cada $a_i \in A$. Consideremos el primer elemento a_1; se puede entonces tomar como imagen, $f(a_1)$, cualquiera de los n elementos de B. Una vez fijado $f(a_1)$ se dispone de n - 1 elementos distintos en B para la imagen de a_2. Continuando el proceso tendremos dos elementos para la imagen de a_{n-1} y uno sólo para la de a_n . Por el Principio de Multiplicación el número total de biyecciones entre A y B será:

$$n . (n - 1) . (n - 2) . \ldots . 2 . 1 = n!$$

4.2.5 Ejemplo

Se deja como ejercicio el probar, utilizando un razonamiento análogo al del ejemplo anterior, que el número de aplicaciones inyectivas de $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ en $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, con $r \leq n$, es

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Como consecuencia del ejemplo anterior y de la descripción de las variaciones en términos de aplicaciones inyectivas se tiene:

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$. Entonces el número de variaciones de orden r de A es

$$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

4.2.6 Ejemplo

(a) ¿Cúantas palabras diferentes de seis letras distintas pueden formarse con los elementos del conjunto A = {a, b, c, d, e, f, g, i, l, m}?

(b) ¿Cúantas de esas palabras contienen la letra b?

Solución

(a) Como consecuencia del resultado anterior se tiene

$$V(10, 6) = 10! / 4! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200.$$

(b) Supongamos una palabra que contenga la letra b. Esta letra puede ocupar una de las seis posiciones dentro de la palabra. Una vez fijada su posición tenemos que colocar cinco letras diferentes tomadas del conjunto A - {b}, es decir, de un conjunto de 9 letras. Por el Principio de Multiplicación se tiene:

$$6 \cdot V(9, 5) = 6 \cdot (9!/4!) = 6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 90720.$$

4.2.7 Ejemplo

Se forman con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 números con cinco de ellas no repetidas.

(a) ¿Cúantos números se pueden formar?

(b) ¿Cúantos de ellos son múltiplos de 4 y cúantos son múltiplos de 2?

Solución

(a) La cantidad de números que se pueden formar con cinco cifras (de las dadas) es igual al número de variaciones de 6 elementos tomados de cinco en cinco:

$$V(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!/1! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

(b) De los números que se pueden formar, con las cifras dadas, sólo son divisibles por cuatro aquellos que acaban en 12, 24, 32, 52 y 72. Consideremos un número de cinco cifras, formado con las seis dadas, que acabe en 12; para completar dicho número debemos ocupar sus tres primeras posiciones con cifras distintas tomadas del conjunto {3, 4, 5, 7} = {1, 2, 3, 4, 5, 7} - {1, 2}. Entonces se podrán formar con las cifras {1, 2, 3, 4, 5, 7}, V(4, 3) números que terminan en 12. Efectuando un proceso análogo al anterior para los números con las otras terminaciones, encontramos en total $5 \cdot V(4, 3) = 120$ números.

Un número es múltiplo de 2 si es divisible por 2, es decir, en nuestro caso, si termina en 2 ó 4. Para formar los números pedidos, tanto en un caso como en el otro, hay que tener en cuenta que queda fijada la última cifra del número y las cuatro restantes se pueden llenar con algunas de las otras cinco del conjunto dado, luego se tendrán $2 \cdot V(5, 4)$ números que son múltiplos de 2, es decir, 240 números.

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural.

Una *variación con repetición* de orden r de A es una lista ordenada $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos de A, en donde los elementos pueden

repetirse. Diremos que dos variaciones con repetición son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra, o bien si las dos listas contienen los mismos elementos en distinto orden.

- Se designará el número de variaciones con repetición de orden r del conjunto A con n elementos por VR(n, r). En ocasiones se utiliza la expresión: VR(n, r) es el número de variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r.

4.2.8 Ejemplo

Sea A = {a, b, c}. Las palabras de dos letras que se pueden formar, tomando dos letras iguales o distintas, del conjunto A son:

aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb,

luego su número es VR(3, 2) = 9.

- **Observación:**

Si $(a_1, a_2, ..., a_r)$ es una variación con repetición de orden r de A, entonces podemos asociarle la aplicación

$$\sigma : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow A$$

definida por $\sigma(i) = a_i$, $1 \leq i \leq r$. Además a cada aplicación

$$\sigma : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow A,$$

le podemos asociar la variación con repetición de orden r,

$$(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r)).$$

Por tanto es equivalente el definir una variación con repetición de

orden r como una lista ordenada $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos de A, o como una aplicación $\sigma : \{1, 2, ..., r\} \to A$.

4.2.9 Ejemplo

Aplicando el Principio de Multiplicación, probar que si A y B son dos conjuntos con r y n elementos respectivamente, entonces, el número de aplicaciones de A en B es n^r.

> Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural. Entonces el número de variaciones con repetición de orden r de A es
>
> $$VR(n, r) = n^r$$

4.2.10 Ejemplo

En el juego de las quinielas, ¿cuál es el número mínimo de columnas que han de rellenarse para acertar con seguridad los catorce signos?

Solución

Una columna es un conjunto con 14 huecos. En cada uno de ellos podemos poner uno de los tres signos 1, X, 2.

Se trata de hallar el número de variaciones con repetición de orden 14 (los 14 huecos) de 3 elementos. Habrá que rellenar

$$VR(3, 14) = 3^{14} = 4782969$$

columnas.

4.2.11 Ejemplo

En el subconjunto A del alfabeto formado por las letras {a, b, c, d}, ¿cúantas palabras distintas de diez letras pueden formarse?

Solución

Una palabra es un conjunto de diez símbolos siendo cada uno de ellos una de las letras de A, luego el número de palabras será igual al de las variaciones con repetición de cuatro elementos tomados de diez en diez:

$$VR(4, 10) = 4^{10} = 1048576.$$

Sea A un conjunto finito formado por n elementos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Una *permutación* de A es una lista ordenada formada por los n elementos de A. Dos permutaciones de A difieren en la colocación de al menos uno de los elementos.

- De la definición anterior se deduce que las permutaciones de n elementos coinciden con las variaciones de orden máximo que se pueden formar con estos elementos, es decir, con las variaciones de n elementos tomados de n en n.

- Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, obsérvese que a cada permutación de los elementos de A, $\{a_{k(1)}, a_{k(2)}, ..., a_{k(n)}\}$, se le puede asociar una biyección de A en A definida por $\sigma(a_i) = a_{k(i)}$, y, recíprocamente, a cada biyección σ de A en A se le puede asociar la ordenación $\{\sigma(a_1), \sigma(a_2), ..., \sigma(a_n)\}$; así las permutaciones de A se pueden considerar como biyecciones de A en A (u ordenaciones de los elementos de A).

4.2.12 Ejemplo

Si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, todas las permutaciones de A, o biyecciones de A en A, son

$$a_1a_2a_3, a_2a_1a_3, a_3a_1a_2,$$

$$a_1a_3a_2, a_2a_3a_1, a_3a_2a_1,$$

en total 6.

Como consecuencia de la relación entre permutaciones y variaciones se tiene que el *número de permutaciones* de un conjunto de n elementos, que designaremos por P(n), es:

$$P(n) = V(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

4.2.13 Ejemplo

¿De cúantas maneras se pueden distribuir siete personas en una fila de siete sillas?

Solución

Las diferentes maneras de colocarlos se corresponden con las posibles permutaciones de siete personas y éstas son:

$$P(7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

4.2.14 Ejemplo

¿Cúantas permutaciones del conjunto de las letras a, b, c, d, e, satisfacen la condición que se indica en cada caso:

(a) La letra b está en segunda posición.

(b) La letra a está en primera posición y la d en la cuarta.

(c) La letra a está en primera posición o la d en la cuarta.

Solución

(a) Al quedar fija la letra "b" se pueden permutar las otras cuatro. El número de permutaciones será, por tanto $P(4) = 4! = 24$.

(b) En este caso tenemos fijas dos letras. Se permutan las otras tres y entonces el número buscado es $P(3) = 3! = 6$.

(c) Supongamos que la letra "a" esta en primera posición y las otras cuatro en cualquiera de las posiciones restantes. Por el apartado (a) tenemos 24 permutaciones que satisfacen estas condiciones. Si fijamos la "d" en cuarta posición, repitiendo el razonamiento, tenemos otras 24

permutaciones. Ahora bien, entre las 24 primeras están incluidas las permutaciones que tienen una "d" en cuarta posición, y entre las 24 segundas están incluidas las que tienen una letra "a" en primera posición. Por tanto, las permutaciones que tienen simultáneamente una "a" en la primera posición y una "d" en la cuarta se han contado dos veces, y este número se ha calculado en b). Luego el resultado será 24 + 24 - 6 = 42.

- Al efectuar una variación de orden r de un conjunto A se considera que el orden de elección de los elementos es importante. Por ejemplo los números de teléfono 3 57 21 36 y 3 57 12 36 son diferentes. Sin embargo existen situaciones reales en las cuales el orden de elección es irrelevante. Por ejemplo, al repartir cartas para formar una mano de póker el resultado es independiente del orden en que las cinco cartas hayan llegado a un jugador. Calcular el número de manos de póker diferentes que pueden obtenerse con una baraja de 52 cartas es equivalente a calcular cúantos subconjuntos distintos de cinco elementos tiene un conjunto de 52 elementos. Este problema nos lleva a la definición de combinación que presentamos a continuación.

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$. Una *combinación* de orden r de A es una lista $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos de A distintos dos a dos. Diremos que dos combinaciones son diferentes si algún elemento de una lista no se encuentra en la otra.

- Se designará el número de combinaciones de orden r de A por C(n, r), o también por $\binom{n}{r}$ (esta ultima notación fue introducida por Euler).

Se denominará, en lo que sigue, a $\binom{n}{r}$ *número combinatorio* . En ocasiones se utiliza la frase: C(n, r) es el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r.

4.2.15 Ejemplo

Sea el conjunto S = {1, 2, 3, 4}. Vamos a escribir todas las combinaciones de orden tres de los elementos de S, y para cada combinación todas las permutaciones de orden tres.

Solución

El conjunto de las combinaciones de orden tres estará formado por

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2, 4\}, S_3 = \{1, 3, 4\} \text{ y } S_4 = \{2, 3, 4\}.$$

Las permutaciones del $S_1 = \{1, 2, 3\}$ son

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\},$$

y análogamente para S_2, S_3 y S_4.

Ya que $V(4, 3) = 4!/1! = 24$, $C(4, 3) = 4$, y $P(3) = 6$, observamos que

$$V(4, 3) = C(4, 3) \cdot P(3).$$

- El ejemplo anterior nos sugiere la existencia de una relación entre el número de variaciones V(n, r) y el número de combinaciones C(n, r).

Para todo $n \in N$ y para todo r, $1 \leq r \leq n$,

$$V(n, r) = P(r) \cdot C(n, r) = r! \cdot C(n, r).$$

Por tanto $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

• Se deja como ejercicio para el lector probar, utilizando el Principio de Multiplicación, el resultado anterior.

4.2.16 Ejemplo

Determínese el número de manos de póker distintas (cinco cartas) que pueden formarse con una baraja de 52 naipes.¿Cúantas manos contienen exactamente tres ases?

Solución

El número de manos de póker distintas es el mismo que el número de combinaciones de orden 5 que se pueden formar con un conjunto de 52 elementos. Es decir,

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!47!} = 2598960.$$

Obtenemos ahora el número de manos que contienen exactamente tres ases. En primer lugar observamos que, como hay cuatro ases en la baraja, podemos elegir tres de ellos de C(4, 3) formas diferentes. Las otras dos cartas serán necesariamente del subconjunto de cuarenta y ocho cartas que no son ases. Por el Principio de Multiplicación se tiene

$$C(4,3) \,.\, C(48,2) = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{48!}{2!46!} = 4 \,.\, 24 \,.\, 47 = 4512.$$

4.2.17 Ejemplo

En un muestreo realizado por cierto partido político, antes de unas elecciones, 25 personas responden de la siguiente manera: 12 responden sí, 8 responden no y 5 están indecisos. ¿De cúantas formas se puede obtener este resultado?

Solución

Se colocan en 25 casillas las respuestas de la encuesta. Existen C(25,12) maneras de colocar los síes en las casillas, quedando 13 casillas en cada caso sin rellenar. Por lo tanto hay C(13, 8) modos de

colocar en esas casillas los 8 noes y C(5, 5) maneras de colocar los indecisos. Luego por el Principio de Multiplicación hay

$$C(25, 12) \cdot C(13, 8) \cdot C(5, 5) = 6692786100$$

formas de obtener dicho resultado.

4.2.18 Ejemplo

Consideremos una caja que contiene siete bolas: tres rojas, dos azules y dos blancas. Se selecciona de forma aleatoria un subconjunto de tres bolas. ¿Cuántos de tales subconjuntos contienen al menos dos bolas rojas?

Solución

Si un subconjunto de tres bolas debe contener al menos dos bolas rojas, es evidente que dicho subconjunto contiene dos o tres bolas rojas. Hay C(3, 2) formas de obtener dos bolas rojas de un conjunto de tres y C(4,1) maneras de elegir una bola que no es roja de un conjunto de 4. Por el Principio de Multiplicación hay C(3, 2) . C(4, 1) = 12 formas de obtener un conjunto de tres bolas con dos rojas. Puesto que el número de combinaciones de orden tres con tres rojas es C(3, 3) = 1, el Principio de Adición nos afirma que hay C(3, 2) . C(4, 1) + C(3, 3) = 12 + 1 = 13 subconjuntos de tres elementos con al menos dos rojas.

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ un conjunto finito con k elementos ($k > 0$). Una *permutación con repetición* de m elementos de A, es una lista en la que el elemento a_1 se repite m_1 veces, el elemento a_2, m_2 veces, hasta el a_k que se repite m_k veces, siendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$ ($m \in \mathbf{N}$). Dos listas son distintas si difieren en el orden de sus elementos.

4.2.19 Ejemplo

Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Formemos las listas de longitud 5 (m = 5),

donde aparecen repetidos tres veces a_1 ($m_1 = 3$) y dos veces a_2 ($m_2 = 2$). Es decir, vamos a formar las permutaciones con repetición de los cinco elementos, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2:

$a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2$	$a_1\ a_2\ a_2\ a_1\ a_1$
$a_1\ a_1\ a_2\ a_1\ a_2$	$a_2\ a_1\ a_1\ a_1\ a_2$
$a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_1$	$a_2\ a_2\ a_1\ a_1\ a_1$
$a_1\ a_2\ a_1\ a_2\ a_1$	$a_2\ a_1\ a_2\ a_1\ a_1$
$a_1\ a_2\ a_1\ a_1\ a_2$	$a_2\ a_1\ a_1\ a_2\ a_1$

por tanto el número de permutaciones con repetición de esos cinco elementos es 10.

Se puede probar, aunque no se va a hacer aquí, que el número de permutaciones con repetición de m elementos, de los cuales el primero se repite m_1 veces, el segundo m_2 veces, etc., hasta el k-ésimo que se repite m_k veces ($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$), es

$$P(m)^{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}.$$

4.2.20 Ejemplo

Una señal consiste en diez banderas colgadas de una cinta vertical de las que cinco son verdes, tres blancas y dos negras, siendo indistinguibles las banderas del mismo color. ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer?

Solución

El número de señales diferentes se corresponderá con el número de permutaciones de diez elementos de los que uno se repite cinco veces, otro tres y por último otro dos veces; luego se tendrán

$$P(10)^{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

señales diferentes.

4.2.21 Ejemplo

Si una partida de bridge es una partición ordenada de 52 cartas en cuatro grupos de 13 cartas cada uno, ¿de cúantas formas distintas pueden estar colocadas las cartas al iniciarse una partida de bridge?

Solución

Lo que tenemos que determinar es el número de permutaciones de 52 elementos donde cuatro de ellos se repiten trece veces, es decir, se tienen

$$P(52)^{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!13!13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4} \equiv 5'3645 \cdot 10^{28}$$

manos distintas.

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural. Una *combinación con repetición* de orden r de A es una lista (a_1, a_2, ..., a_r) de elementos de A, en donde los elementos pueden repetirse. Diremos que dos combinaciones con repetición son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra.

- Se designara el número de combinaciones con repetición de orden r del conjunto A, formado por n elementos, por CR(n, r). En ocasiones se utilizará la frase: CR(n, r) es el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r.

4.2.22 Ejemplo

Sea A = {1, 2, 3, 4}. Vamos a formar todas las combinaciones con repetición de orden 3 de dicho conjunto:

123	124	234	134
113	223	331	441
112	224	332	442
114	221	333	443
111	222	334	444

en total 20 combinaciones distintas.

Sean f y g dos aplicaciones de un conjunto A en otro B. La relación f(x) = g(x) se llama *ecuación*, y se llama *solución* de dicha ecuación a cada elemento a de A tal que f(a) = g(a). Cuando se ha encontrado el conjunto de todas las soluciones se dice que se ha resuelto la ecuación anterior.

Se puede probar que el número de combinaciones con repetición de orden r de un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r,$$

que, a su vez, es igual a

$$CR(n, r) = C(n + r - 1, r) = \binom{n + r - 1}{r}.$$

4.2.23 Ejemplo

Determinar el número de combinaciones con repetición de orden 3, del conjunto A = {1, 2, 3, 4}.

Solución

Aplicando la fórmula anterior, se tiene

$$CR(4,3) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 .$$

4.2.24 Ejemplo

¿Cuántos números enteros comprendidos entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?

Solución

Si se consideran n casillas en donde se pueden introducir números enteros comprendidos entre 0 y 9, ambos incluidos, entonces la cantidad de números enteros no negativos, tales que la suma de sus dígitos es exactamente r, es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r,$$

es decir,

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}.$$

En nuestro caso $r = 9$, $n = 4$, y por tanto $C(4+9-1, 9) = C(12, 9) = 220$, a este número hay que restarle el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$C(3+9-1, 9) = C(11, 9) = 55$. Esto es debido a que en el primer caso se

han incluido los números que empiezan por 0 y cuyas cifras siguientes suman 9. Luego tendremos finalmente que hay

$$C(4+9-1,9)-C(3+9-1,9)=220-55=165$$

números.

4.3 Propiedades de los números combinatorios

En la sección anterior se han introducido los números combinatorios junto con la notación de Euler para los mismos. Pues bien, como consecuencia de esta definición se pueden deducir una serie de propiedades básicas de dichos números que aparecen frecuentemente en las aplicaciones del cálculo combinatorio.

Como hemos visto el símbolo $\binom{n}{r}$ nos da el número de subconjuntos con r elementos de un conjunto de n elementos. Este hecho nos lleva a los siguientes resultados:

(a)

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad (0\le r\le n)$$

En efecto; sea S un conjunto con n elementos. Para cada subconjunto T de S con r elementos, el complementario S - T posee n - r elementos. Por tanto el número de subconjuntos de S con r elementos es igual al número de subconjuntos de S con n - r elementos.

(b)

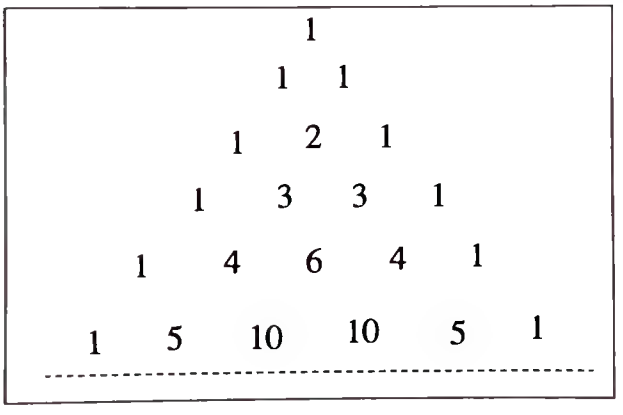
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad (1 \le r \le n-1)$$

Sean S un conjunto de n elementos y "a" un elemento fijo de S. Hay dos tipos de subconjuntos de S con r elementos: los que contienen al elemento "a" y los que no lo contienen. De los que contienen dicho elemento hay tantos como subconjuntos de r - 1 elementos posee el conjunto S - {a}; de los que no lo contienen hay tantos como subconjuntos de r elementos posee el conjunto S - {a}, es decir, del primer tipo hay $\binom{n-1}{r-1}$ y del segundo $\binom{n-1}{r}$.

Dado que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo $n \ge 1$, el resultado (b) anterior proporciona un método para el cálculo de los sucesivos números combinatorios sin emplear más operaciones que la suma. Para ello se disponen los sucesivos números combinatorios en forma de triángulo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

Se observa en primer lugar que los números combinatorios de los extremos de cada fila son de la forma $\binom{n}{0}$ o $\binom{n}{n}$, luego son iguales a 1. Además cada número $\binom{n}{r}$ tiene encima uno de la forma $\binom{n-1}{r-1}$ y otro de la forma $\binom{n-1}{r}$, y puede, por tanto, obtenerse sumando éstos. Aplicando estas dos reglas se obtiene el triángulo número:



Esta figura se conoce como triángulo de Pascal.

4.3.1 Ejemplo

Probar directamente que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para $0 \leq k \leq n$.

Solución

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

4.3.2 Ejemplo

La transmisión electrónica de información está usualmente codificada en cadenas de "ceros" y "unos". Cada dígito de la cadena se llama bit. Se llama peso de una cadena al número de "unos" de la misma. Las interferencias y los problemas físicos de la red de transmisión introducen errores en los mensajes. La detección y corrección de estos errores es una parte importante de la teoría de codificación. Como ejemplo consideremos un código cuyas palabras son cadenas de 16 bits y cuyo peso es divisible por 4. ¿ Cuántas palabras distintas puede haber?

Solución

Sea k el peso de una cadena. El número de palabras de peso k será $\binom{16}{k}$.

Como k es divisible por 4, tenemos que k puede ser 0, 4, 8, 12 ó 16. Así pues, el número total es

$$\binom{16}{0}+\binom{16}{4}+\binom{16}{8}+\binom{16}{12}+\binom{16}{16}.$$

Como por el ejemplo anterior, $\binom{16}{0} = \binom{16}{16} = 1$ y $\binom{16}{4} = \binom{16}{12}$, se tiene que el número de palabras buscadas es

$$\binom{16}{8}+2\left(\binom{16}{4}+1\right) = 16\,512.$$

• De forma usual aparecen en la práctica de las matemáticas expresiones del tipo:

$$(x+y)^n$$

donde n es un número entero positivo, por ejemplo,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

si se añaden las expresiones triviales

$$(x+y)^0 = 1 \quad \text{y} \quad (x+y)^1 = x+y,$$

se puede formar con los coeficientes la siguiente tabla triangular

			1				
		1		1			
	1		2		1		
1		3		3		1	
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
1		6		15		20		15		6		1

que coincide con parte del triangulo de Pascal ya introducido. Esta semejanza nos conduce a la suposición de que los coeficientes de los desarrollos anteriores son los números combinatorios ya introducidos. Como consecuencia de todo esto podemos conjeturar el siguiente resultado, cuya demostración da lugar al conocido Teorema del Binomio (Newton):

Para todo n entero positivo se tiene:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

4.3.3 Ejemplo

Calcular $(x+y)^5$.

Solución

Aplicando el Teorema del Binomio se tiene:

$$(x+y)^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5 =$$
$$x^5 + \frac{5!}{1!\,(5-1)!}x^4y + \frac{5!}{2!\,(5-2)!}x^3y^2 + \frac{5!}{3!\,(5-3)!}x^2y^3 +$$
$$+\frac{5!}{4!\,(5-4)!}xy^4 + \frac{5!}{5!\,(5-5)!}y^5 =$$
$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

4.3.4 Ejemplo

Calcular el coeficiente del termino x^3y^6 obtenido en el desarrollo de $(x+y)^9$.

Solución

Del teorema del binomio se tiene, haciendo j = 6, de forma que 9 - j = 3, el valor

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

4.3.5 Ejemplo

Calcular $(2x - 3y)^4$.

Solución

$$(2x-3y)^4 = (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y) + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

$$(2x)^4 + \frac{4!}{1!(4-1)!}(2x)^3(-3y) + \frac{4!}{2!(4-2)!}(2x)^2(-3y)^2 + \frac{4!}{3!(4-3)!}(2x)(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

$$(2x)^4 - 12y(2x)^3 + 6(2x)^2(-3y)^2 + 8x(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

$$16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

Notas Históricas

Puede considerarse que la combinatoria, como disciplina científica, tiene su inicio en los trabajos de Leibniz y J. Bernouilli. El primero de ellos hacia el año 1666 dio la primera construcción sistemática de esta parte de las Matemáticas en el libro "Razonamiento sobre el arte combinatorio". Más tarde (alrededor de 1700) Leibniz perfeccionó el simbolismo combinatorio. J. Bernouilli en la obra "Arte de la suposición" (1713) construyó la combinatoria como la herramienta básica de aquella época para resolver problemas de probabilidades. Posteriormente los métodos combinatorios quedaron como medio de resolución de problemas en diferentes ramas de las Matemáticas. El Análisis Combinatorio alcanzó un nuevo desarrollo a mediados del siglo XX debido al gran número de aplicaciones en las cuales se podía utilizar como método de resolución de problemas.

4.4 Ejercicios

1.- Dado el conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

a) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas que no contengan al cero se pueden escribir?

b) ¿Cuántos números de cinco cifras hay?

c) ¿Cuántos números de ocho cifras son divisibles por cinco?

d) ¿Cuántos números de seis cifras distintas son menores que 650000?

2.- Tres matrimonios van juntos al cine y los sitúan en una determinada fila de butacas (todos juntos) y al salir del cine deciden ir a cenar y les colocan en una mesa para seis comensales que es redonda. Se pide determinar:

a) ¿De cuántas formas distintas se han podido sentar en el cine?.

b) ¿De cuántas formas distintas se han podido sentar en la cena?.

c) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar en el cine de manera que las mujeres estén juntas ?.

d) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar en la cena de manera que no haya dos personas del mismo sexo juntas?.

3.- En una escapada del Tour de Francia hay tres corredores del equipo A, dos del equipo B, uno del equipo C, uno del equipo D y dos del equipo E. Se pide:

a) ¿De cuántas formas distintas pueden llegar estos corredores a la meta?

b) ¿De cuántas formas distintas pueden clasificarse los equipos de esta escapada?

c) ¿De cuántas formas distintas pueden clasificarse los equipos de forma que no gane el equipo con más componentes?

4.- Sobre un papel cuadriculado se dibuja un rectángulo de 4 por 6 cuadritos (alto por ancho). Siguiendo las líneas de los cuadritos se dibuja un camino que une los vértices opuestos de una misma diagonal. ¿Cuántos caminos distintos se pueden dibujar de forma que cada vez que se dibuja un trazo se está más cerca del final?.

5.- Desarrollar las siguientes potencias usando el Teorema del Binomio:

a) $(2x+3)^5$.

b) $(x-2y)^6$

TEMA 5

Probabilidad

La teoría de probabilidades trata de formular en el lenguaje matemático, y resolver, los problemas que surgen a la hora de predecir valores de los parámetros o variables que describen experimentos sobre fenómenos de caracter aleatorio o no determinista. Esto es así porque a pesar de su caracter imprevisible, a nivel individual, cuando el experimento se realiza muchas veces se puede llegar a establecer leyes de comportamiento y por lo tanto predecir o calcular valores para las variables que intervienen. Por ejemplo no sabemos lo que saldrá al lanzar un dado una vez, pero sabemos que si lo lanzamos 120000 veces cada número saldrá, aproximadamente 20000 veces.

5.1 Probabilidad de sucesos

Al efectuar un experimento aleatorio (experimento que se puede repetir cuantas veces se quiera y cuyo resultado es impredecible) hay que prestar atención a ciertas características del mismo, haciéndose abstracción de las demás. Por ejemplo al lanzar una moneda, se considera el resultado: cara o cruz, y no se tienen en cuenta tamaño, forma de lanzarla, etc. Este hecho nos lleva a definir un conjunto que refleje esta forma de actuar.

Se llama *espacio muestral* (lo designaremos por E) asociado a un experimento aleatorio, al conjunto de todas los resultados posibles del experimento.

5.1.1 Ejemplo

El espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda será E = {C, +}. El asociado al lanzamiento de un dado: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si lanzamos dos dados distintos el espacio muestral es:

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\},$$

que posee 36 elementos.

• A cada elemento de E se le denominará resultado o *muestra* (o suceso elemental) y a los subconjuntos de E *sucesos* . Sea A un suceso de E, y supongamos que el experimento se lleva a cabo y que el resultado es $x \in E$, este resultado puede o no pertenecer a A; si pertenece, se dice que *el suceso A ha ocurrido*; en caso contrario se dice que *el suceso A no ha ocurrido*, es decir $x \in E - A$, lo que equivale a decir que ha ocurrido el *suceso contrario o complementario* $A' = E - A$. El *suceso A es seguro o cierto* si A = E, puesto que como es evidente, todo resultado del experimento pertenece a A. Un *suceso A es imposible* si $A = \varnothing$ (conjunto vacio), porque en este caso ninguno de los resultados obtenidos pertenece a A. Sabemos que si E es un conjunto formado por n elementos, el conjunto de las partes de E, es decir, el conjunto de los subconjuntos de E, $\wp(E)$, posee 2^n elementos (sucesos). $\wp(E)$ es cerrado respecto a las operaciones de unión, intersección y diferencia de subconjuntos de E, es decir, estas operaciones dan subconjuntos de E: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ pertenecen a $\wp(E)$, cualesquiera que sean A, $B \in \wp(E)$.

Dos *sucesos* A y B se llaman *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

5.1.2 Ejemplo

En el experimento de lanzamiento de un dado se ha visto que el espacio muestral tiene la forma $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En este caso $\wp(E)$, conjunto de sucesos, consta de $2^6 = 64$ elementos. El *suceso contrario* (o complementario) al $\{1, 3\}$ es $\{2, 4, 5, 6\}$, puesto que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{1, 3\} = \{2, 4, 5, 6\}$. Los sucesos $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 6\}$ son incompatibles pues $\{1, 3, 4\} \cap \{2, 6\} = \varnothing$.

5.1.3 Ejemplo

Se lanza una moneda dos veces. (a) Describir el espacio muestral asociado al experimento. (b) Dar los sucesos que ocurren cuando se da el suceso elemental {C +}. (c) ¿Cuál es el suceso contrario del suceso {salen dos caras}?.

Solución

(a) $E = \{CC, C+, +C, ++\}$. El número de elementos de $\wp(E)$, conjunto de sucesos, será $2^4 = 16$:

$$\wp(E) = \{\varnothing, \{CC\}, \{C+\}, \{+C\}, \{++\}, \{CC, C+\}, \{CC, +C\}, \{CC, ++\}, \{C+, +C\}, \{C+, ++\}, \{+C, ++\}, \{CC, C+, +C\}, \{CC, C+, ++\}, \{CC, +C, ++\}, \{C+, +C, ++\}, E = \{CC, C+, +C, ++\}\}.$$

(b)

$$\{CC, C+\}, \{C+, +C\}, \{C+, ++\}, \{CC, C+, +C\}, \{CC, C+, ++\}, \{C+, +C, ++\}, \{CC, C+, +C, ++\}.$$

(c) El suceso contrario a $\{CC\}$ será

$$E - \{CC\} = \{C+, +C, ++\}.$$

Notas Históricas

El nacimiento de la teoría de probabilidades está asociado históricamente al análisis de problemas relacionados con juegos de azar. Una disputa entre jugadores en 1654 llevó a Blaise Pascal y Pierre de Fermat a la creación del cálculo de probabilidades. La correspondencia entre estos dos matemáticos, relativa a dicho problema, transcendió hasta Christian Huygens, maestro de Leibniz, que publicó el primer libro sobre probabilidades. Merecen ser destacados los desarrollos que sobre este tema realizaron en ese periodo Jakob Bernouilli (1654-1705) y Abraham de Moivre (1667-1754). En 1812, Laplace (1749-1827) estableció la teoría analítica del cálculo de probabilidades que A. Kolmogorov (1933) llevó a su formulación actual. Hoy en día la teoría de probabilidades es parte de una disciplina matemática más general, que es la teoría de la medida.

Al igual que ha ocurrido con otras muchas ramas de la matemática, el desarrollo del cálculo de probabilidades ha sido estimulado por la variedad de aplicaciones en las que se ha usado. A su vez, cada avance en la teoría ha ampliado su campo de influencia. De hecho, la estadística matemática es una rama importante de las aplicaciones del cálculo de probabilidades.

- Sean A y B sucesos contenidos en el espacio muestral E, y "a" el resultado de un experimento aleatorio asociado a E, entonces se tiene las siguientes equivalencias:

$a \in A \cup B$	Por lo menos uno de los sucesos A o B ocurren
$a \in A \cap B$	Ambos sucesos A y B ocurren
$a \in A' \cap B'$	Ni A ni B ocurren
$a \in A \cap B'$	A ocurre, B no
$B \supseteq A$	Si A ocurre, tambien B

$A \cap B = \varnothing$	A y B se excluyen mutuamente
$A \cup B$	Suceso A o suceso B
$A \cap B$	Suceso A y suceso B

• La teoría de probabilidades se ocupa de medir hasta qué punto se puede esperar que ocurra un suceso. A dicha medida se la designa por *probabilidad*.

5.1.4 Ejemplo

Que a un suceso, asociado a cierto espacio muestral, se le asigne una probabilidad de 0'7, significa que de cada 10 veces que se realiza un experimento, con dicho espacio muestral, 7 veces ocurre dicho suceso.

• Matemáticamente se asigna al concepto de probabilidad una función definida sobre el conjunto de los sucesos y con valores en la recta real (o numérica). Por tanto, si E es un espacio muestral de cierto experimento y $\wp(E)$ es el conjunto de sucesos asociados a E, entonces,

Una *función probabilidad* es una aplicación

$$P : \wp(E) \to \mathbf{R}$$

que verifica las siguientes condiciones;
1) $P(A) \geq 0$, cualquiera que sea el suceso A,
2) $P(E) = 1$,
3) Si $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades)

• El número P(A), asociado a $A \in E$, es la probabilidad de que al efectuar un experimento (o prueba) el resultado sea un elemento de A, o

lo que es lo mismo, es la probabilidad de que el suceso A ocurra al efectuar la prueba. Como consecuencia de los apartados 1), 2) y 3) de la definición anterior, se tiene:

1) $P(A) + P(A') = 1$ (la probabilidad de un suceso más la de su contrario es uno)
2) $P(A) \leq 1$.
3) $P(\varnothing) = 0$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
siendo A y B dos sucesos cualesquiera.
5) Si E es un espacio muestral formado por los elementos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, y A es el suceso $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $k \leq n$, entonces

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_k),$$

la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.
6) Si $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $P(a_1) = P(a_2) = ... = P(a_n)$, se tiene que la probabilidad del suceso $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ es

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} \text{ (Ley de Laplace).}$$

Este último resultado nos dice que si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, entonces, la probabilidad de un suceso A formado por k sucesos elementales es

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

donde n=|E|. Si bien esta expresión es muy sencilla, a veces contar el número de casos favorables, k, así como el número de elementos del conjunto E es muy difícil.

5.1.5 Ejemplos

1) Si lanzamos un dado, bien construido, la probabilidad de que salga cualquiera de los números, 1 al 6, es la misma, por lo tanto la probabilidad del suceso "sale un 4" es

$$P(4) = (\text{n}^\circ \text{ de casos favorables})/(\text{n}^\circ \text{ casos posibles}) = \frac{1}{6} .$$

2) La probabilidad de extraer espadas en una baraja española es 1/4, puesto que una de cada cuatro cartas es de espadas.

3) La probabilidad de acertar una quiniela (obtener 14 resultados correctos) rellenándola al azar, es, teniendo en cuenta el resultado obtenido en el ejemplo 4. 3. 10,

$$(\text{n}^\circ \text{ de casos favorables})/(\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}) = \frac{1}{3^{14}} = \frac{1}{4782969} .$$

5.1.6 Ejemplo

Una comisión de un parlamento formada por 8 mujeres y 6 hombres quiere formar un comité de investigación con 5 personas. Si la formación de dicho comité se hace al azar, ¿cúal es la probabilidad de que el comité contenga 5 mujeres?.

Solución

$$P(5 \text{ mujeres}) = (\text{n}^\circ \text{ de casos favorables})/(\text{n}^\circ \text{ casos posibles}) =$$

$$(\text{n}^\circ \text{ de combinaciones para dicho suceso})/(\text{n}^\circ \text{ total de combinaciones}) =$$

$$\frac{\binom{8}{5}}{\binom{14}{5}} = \frac{56}{2002} = \frac{4}{143} .$$

• Hay veces en que no se conoce la probabilidad asociada a los sucesos elementales de un espacio muestral, o bien ésta no es la misma para cada uno de ellos. En el primer caso la forma de asignar una probabilidad a los sucesos elementales consiste en repetir el experimento y observar la frecuencia de los diferentes resultados.

5.1.7 Ejemplo

Si un dado no está bien constituido, y por lo tanto no se le puede asignar la misma probabilidad a cada uno de sus sucesos elementales, se lanza 100 veces y se apuntan las veces que han salido 1, 2, 3, 4, 5 y 6; si dichos resultados son por ejemplo:

1	2	3	4	5	6	total
12	18	9	25	20	16	100

entonces, las frecuencias relativas asociadas a cada suceso son:

1	$f_r(1)$	12/100	0'12
2	$f_r(2)$	18/100	0'18
3	$f_r(3)$	9/100	0'09
4	$f_r(4)$	25/100	0'25
5	$f_r(5)$	20/100	0'2
6	$f_r(6)$	16/100	0'16

• Evidentemente siempre al sumar todas las frecuencias relativas tiene que dar la unidad. Se puede establecer experimentalmente que cuando el número de lanzamientos aumenta, la frecuencia relativa de los

diferentes resultados se estabiliza en torno a ciertos valores fijos que se pueden considerar como su probabilidad. Dicho resultado se conoce como *ley de los grandes números* y lo podríamos enunciar así:

Al realizar un experimento aleatorio repetidamente (en iguales condiciones físicas) la frecuencia relativa del suceso A, para dicho experimento, es

$f_r(A)$ = (nº de veces que ha ocurrido A)/(nº de veces que se ha realizado el experimento) = $\frac{f_n(A)}{n}$

designándose, cuando n crece ilimitadamente, por *probabilidad*:

$P(A)$ = límite (cuando n crece ilimitadamente) de $\frac{f_n(A)}{n}$

5.2 Probabilidad condicionada

El concepto de probabilidad condicionada surge cuando se intenta resolver problemas como los siguientes:

- Se lanza un dado y se sabe que el resultado es un número par. ¿Cúal es la probabilidad de que este número sea divisible por 3?

- Una caja contiene 10 bolas blancas y 8 bolas negras, se extrae una bola al azar y, sin devolverla a la caja, se extrae otra. ¿Cúal es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

Este tipo de problemas se pueden semi-formalizar como sigue: Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E; si ocurre B, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra A?. Evidentemente, responder a esta pregunta no es lo mismo que responder a la cuestión: ¿Cuál es la probabilidad del suceso $A \cap B$? En el primer caso cuando $A = B$, la respuesta sería 1, y ésta puede no ser la respuesta a la segunda cuestión. La forma de resolver estos problemas se verá a continuación.

Notas Históricas

El origen histórico de la noción de probabilidad condicionada se remonta a los escritos de Huygens y Jakob Bernouilli a finales del s. XVII, llegando a una formulación semejante a la actual con De Moivre (1667-1754). Con dichos estudios, la noción de probabilidad condicionada significó un complemento importante al cálculo de probabilidades y permitió simplificar de forma substancial problemas donde el cálculo directo era muy complicado.

5.2.1 Ejemplo

Se lanza un dado y se sabe que el resultado es un número par. ¿Cúal es la probabilidad de que este número sea divisible por 3?

Solución

El espacio muestral asociado al "dado" en dicho ejemplo es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Puesto que el dado está bien construido podemos asignar a cada suceso elemental la probabilidad 1/6. El suceso A divisible por 3 es el subconjunto de E, $A = \{3, 6\}$ y el suceso par, B, es $\{2, 4, 6\}$. Queremos ahora obtener la probabilidad de un suceso elemental que está en A, sabiendo que se encuentra también en B. Puesto que sólo estamos interesados en que ocurran los sucesos "salir un número par", podemos restringir nuestro espacio muestral al espacio $E^* = \{2, 4, 6\}$. Si todos los sucesos elementales en E^* se consideran igualmente probables, el suceso $\{6\}$, que es el que nos interesa, tendrá probabilidad 1/3.

- El procedimiento anterior de cambiar el espacio muestral de E a E^* y reasignar probabilidades a este nuevo espacio, nos ha permitido resolver el problema. Este modo de proceder se puede enunciar de forma general

así: sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos y P la función de probabilidad asignada a los sucesos de $\wp(E)$, con $P(B) \neq 0$.

La *probabilidad condicionada* de que el suceso A ocurra, en el supuesto de que ha ocurrido B, se representará mediante P(A / B) (es decir, la probabilidad de A, dado B) y se define por la fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

• Lo que esta última expresión formaliza es el hecho de haber cambiado el espacio muestral E por $E^* = B$, en el que previamente se redefine la función probabilidad a P^*, de forma que $P^*(B) = 1$, y puesto que nos interesan los sucesos elementales de A que pertenecen al nuevo espacio muestral B, el problema se reduce a calcular la probabilidad de $A \cap B$ mediante P^*. Es a $P^*(A \cap B)$ a lo que se ha llamado P(A / B) en la fórmula anterior.

5.2.2 Ejemplo

Una caja contiene 10 bolas blancas y 8 bolas negras, se extrae una bola al azar y, sin devolverla a la caja, se extrae otra. ¿Cúal es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

Solución

Vamos a ver dos formas de resolver este ejercicio. En la primera emplearemos métodos combinatorios junto con la definión de probabilidad condicionada, y en la segunda se emplearán además de los métodos combinatorios, la definición ordinaria de probabilidad.

1) El espacio muestral del experimento "sacar dos bolas de un conjunto de 18" consta de V(18, 2) = 306 elementos. El suceso B = {sacar una bola blanca en la primera extracción y una bola cualquiera en

la segunda} estará formado por 170 elementos de los cuales $V(10,1)V(8,1) = 80$ serían elementos del suceso {sacar bola blanca, sacar bola negra} y $V(10, 2) = 90$ serían elementos del suceso "sacar dos bolas blancas". Sea A el suceso "sacar una segunda bola blanca después de haber sacado una primera bola blanca". Designamos el nuevo espacio muestral $E^* \neq B$, que constará de 170 elementos. Supongamos que todos los sucesos elementales en E^* son igualmente probables en relación a P^*, entonces la probabilidad asociada a cada uno de ellos sera 1/170. La probabilidad que buscamos es $P(A \cap B)$, es decir, la probabilidad de que, después de extraer una primera bola blanca, la segunda también sea blanca. Por la fórmula de la probabilidad condicionada resulta que:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B).$$

Sabemos que $P(B) = \frac{170}{306}$ y $P(A / B) = P^*(A \cap B) = \frac{90}{170}$, ya que $B \supset A$ y el número de elementos del suceso A hemos visto que es 90, luego

$$P(A \cap B) = \frac{170}{306}\frac{90}{170} = \frac{5}{9}\frac{9}{17} = \frac{5}{17}.$$

Se podría también haber considerado como B el suceso "bola blanca en la primera extracción", A el suceso "bola blanca en la segunda extracción", en este caso $P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ $P(A/B) = \frac{9}{17}$ y

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{5}{9}\frac{9}{17} = \frac{5}{17}$$

2) Teniendo en cuenta 5. 2. 6, se podría hacer un razonamiento análogo para este caso. La probabilidad de sacar dos bolas blancas será igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles. Pero hemos visto en 1) que el número de sucesos elementales, en el espacio muestral E, del suceso "bola blanca, bola blanca" es $V(10, 2) = 90$ y que E consta de 306 elementos, luego la probabilidad del suceso "bola blanca, bola blanca" será

$$\frac{V(10,2)}{V(18,2)} = \frac{90}{306} = \frac{5}{17}.$$

5.2.3 Ejemplo

Se tiran dos dados. ¿Cúal es la probabilidad de que la suma sea 8 si sabemos que la suma es un número par?

Solución

El espacio muestral, tirar dos dados, es

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,(6,5),(6,6)\},$$

formado por 36 elementos.

El suceso, B, {suma de los dos dados es par}, está formado por 18 elementos

$$B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

El suceso, A, {suma de los dos dados es 8}, está formado por

$$A = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}.$$

Puesto que $B \supset A$, $A \cap B = A$; luego por la fórmula de la probabilidad condicional se tiene:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}.$$

5.2.4 Ejemplo

Se sacan dos cartas de una baraja de 40 . 1) Calcular la probabilidad (no condicionada) de que la segunda carta sea un as. 2) Calcular la probabilidad condicional de que la segunda carta sea un as cuando la primera fue un as.

Solución

Sea A el suceso que consiste en sacar un as para la segunda carta y B el suceso consistente en sacar un as para la primera carta. Evidentemente,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap (E - B)),$$

donde E es el espacio muestral para dicho experimento. Puesto que los sucesos $A \cap B$ y $A \cap (E - B)$ son incompatibles, se tiene (por la tercera condición de la definición de función probabilidad):

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap (E - B)).$$

1) "Sacar dos cartas de una baraja de cuarenta teniendo en cuenta el orden", se puede realizar, aplicando el principio de multiplicación, de 40 . 39 formas, es decir, de tantas formas como número de variaciones de 40 elementos tomados de dos en dos, V(40, 2) = 1560. De ellas, hay 4 . 3 casos favorables para el suceso $A \cap B$ y 36 . 4 casos favorables para el suceso $A \cap (E - B)$, entonces

$$P(A) = \frac{4 \cdot 3}{40 \cdot 39} + \frac{36 \cdot 4}{40 \cdot 39} = \frac{1}{10}.$$

2) Si la primera carta es un as, entonces sólo quedan 39 cartas de las cuales tres son ases, luego,

$$P(A / B) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}.$$

• Como se ha visto en los dos últimos ejemplos la forma de encontrar probabilidades condicionadas a partir de la definición habitual de probabilidad es la siguiente: supongamos que tenemos $A_1, A_2, ..., A_n$, sucesos elementales igualmente probables y que el número de casos favorables para el suceso A es m, para B, s, y para $A \cap B$, r, ($r \leq s \leq n$, $r \leq m \leq n$), entonces, si el suceso B ocurre, esto significa que uno de los sucesos A_j que es favorable a B ha ocurrido. Dada esta condición, si r y sólo r sucesos A_j favorables a $A \cap B$ son favorables a A, se tiene

$$P(A/B) = \frac{r}{s} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{s}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

y análogamente

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0.$$

Es decir,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

• Un concepto importante asociado al de probabilidad condicionada es el de *independencia de sucesos*:

Dos sucesos A y B se llaman independientes si, y sólo si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Es evidente que si A y B son independientes, entonces

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A), \text{ si } P(B) \neq 0.$$

Es decir, el hecho de que B haya ocurrido, no influye en la probabilidad de que ocurra A.

5.2.5 Ejemplo

Una carta se extrae de una baraja española de 40 cartas. Cada carta tiene la misma probabilidad de salir. Probar que los sucesos sacar un as y "sacar una espada" son independientes.

Solución

El espacio muestral, E, asociado a este experimento consta de 40 elementos, o sucesos elementales, con probabilidad 1/40. El suceso, A, sacar un as, tiene la probabilidad $P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$, el suceso, B, sacar una espada, tiene la probabilidad $P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. El suceso $A \cap B$, es decir, sacar el as de espadas tiene la probabilidad 1/40, que satisface la definicion anterior , por tanto A y B son independientes.

5.2.6 Ejemplo

Se lanzan independientemente dos dados de modo que cada combinación sea de igual probabilidad. Sea A el suceso "la suma de los digitos obtenidos es 8" y B "los dos dígitos son distintos". ¿Son estos dos sucesos independientes?

Solución

El espacio muestral E estará formado por el conjunto de pares (a, b) con $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es decir, E consta de 36 elementos (o sucesos elementales) y puesto que son igualmente probables les asignamos la probabilidad 1/36 a cada uno. Puesto que el suceso A es el conjunto de pares, (a, b), tales que a + b = 8, por enumeración, podemos ver

fácilmente, que hay 5 sucesos elementales que verifican esta condición:

$$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2).$$

El suceso B está formado por parejas (a, b) tales que $a \neq b$ y de éstas hay $6 \cdot 5 = 30$ (por el Principio de Multiplicación). Por tanto, B consta de 30 elementos. De estos elementos de B, 4 pertenecen a A, luego $A \cap B$ posee 4 elementos, por tanto

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36}, P(A) = \frac{5}{36} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{30}{36}, \text{entonces,}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

5.3 Ejercicios

1.- Determinar el espacio muestral de los siguientes experimentos y estudiar la probabilidad de cada suceso elemental.

(a) Lanzar un dado y una moneda.

(b) Lanzar dos monedas una de cinco pesetas y otra de 100.

(c) Lanzar dos monedas de 100 pesetas.

2.- Se elige un número de cuatro cifras entre todos los posibles Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos.

(a) Obtener un número en donde no se repite ningun dígito.

(b) Obtener un número divisible por cinco.

(c) Obtener un número divisible por veinte.

3.- De una baraja española se extraen cinco cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas no sean del mismo palo?

4.- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número de tres cifras este sea múltiplo de dos o de cinco?

5.- Una urna contiene seis bolas blancas y tres bolas rojas. Se extraen tres bolas, una a una, y no se devuelven a la urna. Hallar la probabilidad de:

(a) Que la primera bola extraída sea blanca.

(b) Extraer al menos una bola roja.

TEMA 6

Estadística descriptiva

La estadística es una parte de la matemática aplicada y tiene como función ordenar, analizar y decidir sobre la estructura matemática asociada a masas de datos números, obtenidos de la observación de fenómenos (físicos, económicos, psicológicos, sociológicos, etc.).

La tarea de describir y procesar de modo adecuado la masa de datos números, provenientes de observaciones y experimentos, constituye el objetivo de la *estadística descriptiva*, que es la rama de la estadística que vamos a ver en este tema.

La estadística descriptiva trata de determinar ciertos parámetros estadísticos, parámetros que nos dan información sobre los rasgos de un elemento tipo del colectivo (o población) estudiado, así como otros parámetros que miden la desviación respecto de este elemento tipo.

6.1 Parámetros estadísticos

Una *población estadística* es un conjunto de individuos, objetos, etc., sobre los que recaen observaciones de un número finito de características.

Llamaremos *variable estadística* al conjunto de valores que adopta una cualidad o propiedad de los elementos de la población estudiada.

Se entenderá por *muestra* una colección finita de elementos de la población estadística.

Sea E una muestra de tamaño n, extraída de una población estadística,

de la que vamos a estudiar una propiedad representada por la variable (de valores discretos) $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Se llama *frecuencia absoluta* n_i de x_i al número de veces que aparece repetido dicho valor en los elementos de la muestra.

6-1.1 Propiedades del símbolo sumatorio

El *símbolo sumatorio* Σ se introduce para poder escribir sumas de forma abreviada. Por ejemplo,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

se puede representar utilizando el símbolo Σ, de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Dicho símbolo se lee: suma de k^2 desde 1 hasta n. En lo que sigue se utilizará el convenio: los números que aparecen encima y debajo del símbolo Σ indican el recorrido de los valores de k, y a k se le llamará *índice de sumación.* Es evidente que el valor de la suma, y su representación simbólica, no depende de la letra o nombre utilizado para la variable índice; por ejemplo, podríamos haber utilizado las letras i, m, j, etc., y los símbolos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2, \qquad \sum_{m=1}^{n} m^2, \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2$$

representarían la misma suma.

En general se designa la suma, de la lista de números

reales $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, por $\sum_{i=1}^{n} x_i$, luego:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3.$$

Otras formas de utilizar el símbolo sumatorio son las siguientes:

$$\sum_{j=0}^{4} x^{j+2} = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

$$\sum_{m=1}^{5} 3^{m-1} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4.$$

Comprobar que las siguientes igualdades son correctas:

$$\sum_{r=1}^{6} 2^{r-1} = \sum_{j=0}^{5} 2^j = \sum_{m=0}^{5} 2^{5-m}.$$

- Las propiedades más importantes del símbolo sumatorio son:

1)
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

2)
$$\sum_{k=1}^{n} cx_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

3)
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

- Se pueden deducir, como consecuencia de la definición de frecuencia absoluta, fácilmente las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n, \qquad 0 \leq n_i \leq n ,$$

donde n es el tamaño de la muestra, m es el número de valores de la variable discreta $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ y n_i es el número de veces que aparece x_i repetido en los elementos de la muestra.

Se define la *frecuencia relativa* f_i de x_i como el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra:

$$f_i = \frac{n_i}{n}, \qquad i = 1, ...,m, \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{m} f_i = 1, \qquad 0 \leq f_i \leq 1 .$$

• Generalmente el resultado de la medida de las propiedades de una muestra se representa en forma de tablas del tipo:

Propiedades a estudiar x_i	Frecuencias absolutas n_i	Frecuencias relativas f_i
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
x_m	n_m	f_m

6.1.2 Ejemplo

La medida de los pesos, x, efectuada en una muestra formada por 57 hombres de 50 años, de cierta población, se puede presentar mediante la tabla :

Pesos x_i	Frecuencias absolutas n_i	Frecuencias relativas f_i
61	8	8/57
61,2	10	10/57

65	2	2/57
70,2	5	5/57
75,9	13	13/57
77,3	3	3/57
80	1	1/57
82,4	15	15/57
total =	57	1

- Se designan con el nombre de parámetros estadísticos a los números (o valores) que describen de forma concisa el comportamiento y las características generales de una variable estadística. Los más utilizados son los siguientes:

1) La *moda*. Es el valor que se presenta con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

2) La *mediana*. Es el valor central de los datos cuando éstos se ordenan de menor a mayor.

Sea $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ una variable estadística.

3) La *media aritmética*, $\langle x \rangle$, o media, es la medida más corriente a la hora de describir el promedio de un conjunto de datos y viene dada por

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} .$$

Si los datos vienen agrupados en relación a su frecuencia se tiene la siguiente fórmula alternativa

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n} .$$

4) *Desviación media*, DM. Es la media aritmética de las desviaciones absolutas de cada valor respecto a la media:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - \langle x \rangle|}{m}$$

5) La *varianza*, σ^2. Es la media de los cuadrados de las desviaciones:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \langle x \rangle)^2}{m} .$$

Las siguientes fórmulas alternativas pueden ser más convenientes en algunos casos

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{m} - \langle x \rangle^2 ,$$

y si se utilizan frecuencias absolutas n_i, se tiene la formula

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n} .$$

6) *La desviación típica*, σ. Se define como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \langle x \rangle)^2}{m}} ,$$

expresión que tiene las siguientes formas alternativas, en términos de las frecuencias absolutas,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \langle x \rangle)^2 n_i}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} - \langle x \rangle^2}$$

6.1.3 Ejemplo

Se tienen las siguientes estaturas (en cms) de un conjunto de alumnos de matemáticas especiales:

164, 168, 173,173, 175, 176, 179, 181.

Vamos a determinar los valores de los diferentes parámetros, para ello previamente construimos una tabla:

x_i	x_i^2	$\lvert x_i - \langle x \rangle \rvert$
164	26896	9'6
168	28224	5'6
173	29929	0'6
173	29929	0'6
175	30625	1'4
176	30976	2'4
179	32041	5'4
181	32761	7'4
$\Sigma = 1389$	$\Sigma = 241381$	$\Sigma = 33$

Moda (valor más frecuente): 173.

Mediana: $\frac{173+175}{2} = 174$ (se calcula el promedio de los datos centrales debido a que el número de datos es par).

Media aritmética :

$$\langle x \rangle = \frac{164+168+173+173+175+176+179+181}{8} = 173'6.$$

Desviación media: $DM = \frac{33}{8}$.

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{m} - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{241.381}{8} - (173'6)^2} \cong 6.$$

Varianza: $\sigma^2 \cong 36$.

- La media es el valor promedio y se puede considerar como el "centro de gravedad" del conjunto de datos tratados. La desviación típica nos mide la dispersión (o distancia) de valores de los datos en relación a la media.

6.1.4 Ejemplo

Calcular la media y la desviación típica de los siguientes conjuntos de datos:

A) Evolución de los precios del cafe en 6 meses:

156, 168, 175, 183, 195, 207.

B) Precios del litro de leche en cinco tiendas diferentes:

36, 39, 43, 45, 47.

C) Precios del litro de leche en esas mismas tiendas un mes después:

35, 36, 38, 40, 41.

Solución: A)

x_i	x_i^2
156	24336
168	28224

175	30625
183	33489
195	38025
207	42849
$\Sigma = 1084$	$\Sigma = 197548$

$$<x> = \frac{1.084}{6} \cong 180'6.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{m} - <x>^2} = \sqrt{\frac{197'548}{6} - (180'6)^2} \cong 17'5.$$

B)

x_i	x_i^2
36	1296
39	1521
43	1849
45	2025

47	2209
$\Sigma = 210$	$\Sigma = 8900$

$$\langle x \rangle = \frac{210}{5} = 42.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{m} - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{8900}{5} - (42)^2} = 4.$$

C)

x_i	x_i^2
35	1225
36	1296
38	1444
40	1600
41	1681
$\Sigma = 190$	$\Sigma = 7246$

$$\langle x \rangle = \frac{190}{5} = 38.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{m} - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{7246}{5} - (38)^2} \cong 2'28.$$

• La desviación típica sirve también para medir la homogeneidad de los datos. Evidentemente en el caso C), del ejemplo anterior, la homogeneidad es mayor que en el caso B). Si en dicho ejemplo se

intenta comparar la dispersión del conjunto de datos en A) respecto de B) o C), parece en principio que es mayor, pero esta apreciación puede ser errónea, puesto que en A) la media también es mayor.

Para poder comparar estadísticamente dos poblaciones (o dos muestras) diferentes se suele utilizar el *coeficiente de variación*, que se define como sigue:

$$CV = \frac{\sigma}{<x>}.$$

- Dicho coeficiente nos da la variación relativa de una población (o muestra) y por tanto mide la homogeneidad (menor coeficiente, más homogénea) de dicha población de forma más objetiva.

6.1.5 Ejemplo

Aplicando dicha fórmula al ejemplo anterior, se tiene:

$$(CV)_{A)} = 0'097, (CV)_{B)} = 0'095, (CV)_{C)} = 0'060.$$

De donde se observa que la homogeneidad de los conjuntos A) y B) es prácticamente la misma, siendo mayor la del caso C).

6.1.6 Ejemplo

Determinar la media aritmética y la desviación típica de los datos presentados en la tabla:

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
61	8	488	3721	29768'0
61'2	10	612	3745'4	37454'0
65	2	130	4225	8450
70'2	5	351	4928	24640
75'9	13	986'7	5760'8	74890'4
77'3	3	231'9	5975'3	17925'9
80	1	80	6400	6400
82'4	15	1236	6789'8	101847
$\Sigma = 573$	$\Sigma = 57$	Σ=4115'6	Σ= 41545'3	Σ=301375'3

$$<x> = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n} = \frac{4115'6}{57} \cong 72'2,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} - <x>^2} \cong \sqrt{\frac{301363}{57} - (72'2)^2} \cong 8'61.$$

6.1.7 Ejemplo

Se ha realizado un examen de matemáticas especiales a un grupo de alumnos. El examen constaba de dos pruebas, denominadas A y B; a partir de la información, obtenida después de su calificación, se han hecho los siguientes cálculos:

$$\langle x_A \rangle = 16'3, \sigma_A = 3$$

y

$$\langle x_B \rangle = 8, \quad \sigma_B = 1'40.$$

Dos alumnos, x^* y x^{**}, que han realizado dichos examenes, han obtenido las puntuaciones:

	x^*	x^{**}
A	15'2	17
B	11	13

¿Cúal de los alumnos supera en puntuación global al otro?

Solución

Primero se van a tipificar las calificaciones obtenidas por cada uno de ellos.

En estadística la forma de *tipificar los datos* de una muestra o población es la siguiente: se sustituye cada dato x_i por el cociente

$$z_i = \frac{(x_i - \langle x \rangle)}{\sigma} .$$

Como consecuencia la nueva distribución tiene media 0 y desviación típica 1. Lo cual permite hacer comparaciones más facilmente.

En nuestro caso

	z^*	z^{**}
A	$\frac{15'2-16'3}{3}=$ -0'36	$\frac{17-16'3}{3}=0'23$
B	$\frac{11-8}{1'40}=2'14$	$\frac{13-8}{1'40}=3'57$

Luego la media del alumno (*) es

$$<z^*>=\frac{-0'36+2'14}{2}=0'89,$$

y la de (**) es

$$<z^{**}>=\frac{0'23+3'57}{2}=1'9.$$

Evidentemente $(<z^{**}>)>(<z^*>)$.

6.2 Ejercicios

1.- Un alumno ha realizado veinte ejercicios a lo largo de un curso, que fueron calificados con:

5, 6, 3, 9, 4, 1, 2, 7, 3, 2, 1, 9, 3, 0, 6, 1, 9, 8, 5, 6.

a) Construir una tabla de frecuencias absolutas y decir cuál es la moda de las calificaciones y cuál la mediana.

b) ¿Cuál es la proporción de ejercicios suspendidos?

c) Determinar la nota media (aritmética) de dichas calificaciones.

2.- Consultadas numerosas personas sobre la altura de una torre se obtuvieron las siguientes respuestas:

10m, 15m, 20m, 25m, 30m, 35m, 40m, 45m, 50m;

con los siguientes porcentajes:

2%, 5%, 8%, 16%, 35%, 20%, 7%, 2% y 5%

respectivamente. Determinar la altura media, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

3.- Un profesor pregunta a sus alumnos cuánto tiempo les ha ocupado entender el anterior ejercicio, y éste anota las siguientes respuestas

minutos	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
nº alumnos	30	46	85	66	30	14	10	10	5	5	3	1

Determinar la media de tiempo empleado para entender el problema, la desviación media, la varianza y la desviación típica. ¿Cuánto tiempo es razonable que se dedique para hacer un problema de éstos en un examen?

4.- La altura de un edificio de 30m de altura es estimada por un grupo de personas.

a) Consultadas 24 personas respondieron:

3 personas - 20m, 6 personas - 25m, 10 personas - 30m, 3 personas - 40m y 2 personas - 45m.

b) Consultadas 98 personas respondieron:

4 personas -10m, 2 personas - 15m, 6 personas - 20m, 10 personas - 25m, 50 personas - 30m, 13 personas - 35m, 9 personas - 40m, 3 personas - 45m y 1 persona - 50m.

Determinar la media y la desviación típica para las dos poblaciones (los dos grupos de respuestas) y compararlas para decidir cuál de los dos grupos dio una respuesta más homogénea (utilizar el coeficiente de variación).

TEMA 7

Sistemas de ecuaciones lineales

En este tema se estudian los sistemas de ecuaciones lineales y en particular algunos métodos de resolución de los mismos. Este estudio se completará en el tema 9 con el Teorema de Rouché-Fröbenius y la Regla de Cramer.

7.1 Ecuaciones lineales.

Una ecuación lineal con n incógnitas es una igualdad de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, son n números reales conocidos, que se denominan *coeficientes* de la ecuación, b es otro número real conocido que se llama *término independiente* y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las *incógnitas de la ecuación*.

- Nótese que en una ecuación lineal sus incógnitas tienen todas grado 1, es decir no están elevadas a ninguna potencia, ni aparecen multiplicadas unas por otras.

7.1.1 Ejemplo

$5x+2=0$ es una ecuación lineal (con una incógnita).

$7x+2y = 24$ es una ecuación lineal (con 2 incógnitas).

$2x-6y+5yz = 0$ no es una ecuación lineal (pues la incógnita y aparece multiplicada por la incógnita z).

Dados n números reales $c_1, c_2,..., c_n$, se dice que:

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$$

es una *solución* de la ecuación lineal:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

si al sustituir las incógnitas $x_1, x_2,..., x_n$ por los números $c_1, c_2,..., c_n$ se obtiene una identidad, es decir si:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b.$$

Resolver una ecuación lineal consiste en hallar todas las soluciones de la misma.

7.1.2 Ejemplo

a) El número 2 es una solución de la ecuación $7x - 5 = 9$, ya que $7.2 - 5 = 14 - 5 = 9$. Nótese que $x = 2$ es la única solución de la ecuación y que para encontrarla basta con despejar la variable x:

$$7x - 5 = 9 \rightarrow 7x = 9 + 5 \rightarrow x = \frac{9+5}{7} = 2.$$

b)Una solución de la ecuación $x - 2y + 5z = 3$ es $x = 3, y = 0, z = 0$ pues $3 - 2.0 + 5.0 = 3$, pero $x = 0, y = 1, z = 1$ también es solución de dicha ecuación ya que $0 - 2.1 + 5.1 = 3$. Como vemos, esta segunda ecuación tiene más de una solución.

- Las ecuaciones lineales tienen la siguiente propiedad:

Si $x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$ es una solución de la ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

entonces $x_1 = c_1, x_2 = c_2,..., x_n = c_n$ es también una solución de la ecuación:

$$ra_1x_1 + ra_2x_2 + \ldots + ra_nx_n = rb\ ,$$

donde r es un número real distinto de cero.

7.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Si en vez de considerar una sola ecuación lineal consideramos varias, obtenemos lo que se denomina un sistema de ecuaciones lineales.

Se llama *sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas* a todo conjunto de ecuaciones lineales de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Los números reales a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}, son conocidos y reciben el nombre de *coeficientes* del sistema. Los números reales b_1, b_2, ..., b_m, también son conocidos y se les denomina *términos independientes*. Por último $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reciben el nombre de *incógnitas*.

En adelante y cuando no haya posibilidad de error, omitiremos la palabra lineal y diremos "sistema de ecuaciones" en vez de "sistema de ecuaciones lineales". Por otra parte cuando el número de incógnitas no es elevado, éstas se suelen denotar por x, y, z, t, ... en vez de por x_1, x_2, x_3, ..., como ya hicimos en los ejemplos de la sección anterior.

7.2.1 Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y-5z=1 \\ -x+3y+z=4 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} 7x+2y-5z=1 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

es un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas.

Se dice que n números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (también se escribe $x_1=c_1$, $x_2=c_2,\ldots,\ x_n=c_n$) son una *solución* del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

cuando son solución de todas y cada una de las m ecuaciones que lo forman.

Es decir, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es una solución del sistema (1) cuando al sustituir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ respectivamente, se verifican las siguientes identidades:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\ldots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\ldots+a_{mn}c_n=b_m \end{array}\right\}$$

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es *compatible* cuando admite al menos una solución e *incompatible* cuando no tiene ninguna solución. Un sistema compatible puede ser *compatible determinado* o *compatible indeterminado*, según que tenga una única solución o más de una solución. En este segundo caso (es decir, cuando el sistema es compatible indeterminado) siempre existen infinitas soluciones.

El proceso de hallar la solución o las soluciones de un sistema de ecuaciones se denomina *resolver* dicho sistema, mientras que estudiar si es compatible, incompatible, compatible deteminado o compatible indeterminado, se llama *discutir* el sistema.

7.3 Sistemas equivalentes.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones, es decir, cuando toda solución del primero de ellos es también solución del segundo, y toda solución del segundo es también solución del primero.

- Ya vimos en la sección 7.1 que si multiplicamos los coeficientes y el término independiente de una ecuación lineal por un mismo número distinto de cero, la nueva ecuación que resulta tiene las mismas soluciones que la ecuación de partida. Por consiguiente, si en un sistema de ecuaciones lineales se *multiplican los coeficientes y el término independiente de una cualquiera de sus ecuaciones* por un mismo número distinto de cero, se obtiene un nuevo sistema que es equivalente al primero.

7.3.1 Ejemplo

$$\left.\begin{array}{c} 3x - y + z - u = 1 \\ 2x - z + u = -2 \\ -x + y - 2z = 3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

multiplicamos la segunda ecuación por -2:

$$\left.\begin{array}{c} 3x - y + z - u = 1 \\ -4x + 2z - 2u = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$\left.\begin{array}{c} 15x - 5y + 5z - 5u = 5 \\ -4x + 2z - 2u = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Los sistemas (1), (2) y (3) son equivalentes.

- Si en un sistema de ecuaciones *cambiamos el orden de sus ecuaciones*, el sistema que se obtiene es equivalente al de partida.

7.3.2 Ejemplo

$$\left.\begin{array}{c} 3x - y + z - u = 1 \\ 2x - z + u = -2 \\ -x + y - 2z = 3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2x - z + u = -2 \\ 3x - y + z - u = 1 \\ -x + y - 2z = 3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2x - z + u = -2 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3x - y + z - u = 1 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Los sistemas (1), (2) y (3) son equivalentes.

- Si en un sistema de ecuaciones cambiamos el orden de sus incógnitas el sistema que se obtiene es equivalente al de partida:

7.3.3 Ejemplo

$$\left.\begin{array}{c} 3x-y+z-u=1 \\ 2x-z+u=-2 \\ -x+y-2z=3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x+z-y-u=1 \\ 2x-z+u=-2 \\ -x-2z+y=3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{c} -u+z-y+3x=1 \\ u-z+2x=-2 \\ -2z+y-x=3 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Los sistemas (1), (2) y (3) son equivalentes.

- Por último, si en un sistema de ecuaciones *sustituimos una ecuación por la ecuación que resulta al multiplicar aquélla por un número real distinto de cero y sumarle otras ecuaciones del sistema multiplicadas por números reales cualesquiera,* entonces el sistema que se obtiene es equivalente al de partida.

7.3.4 Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 2x-y+z=1 \\ x-\frac{1}{2}y+z=7 \\ -x+2y-3z=-1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Sustituyamos la primera ecuación del sistema por la ecuación que se obtiene sumando a la primera ecuación la tercera multiplicada por 2:

$$(1^a \text{ ecuación}): 2x - y + z = 1$$

$$(3^a \text{ ecuación}) \,.\, 2: -2x + 4y - 6z = -2$$

Sumando:

$$0x + 3y - 5z = -1,$$

que es igual a la ecuación:

$$3y - 5z = -1 \text{ (nueva primera ecuación).}$$

Sustituyendo en el sistema (1), obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3y - 5z = -1 \\ x - \frac{1}{2}y + z = 7 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes.

Sustituyamos ahora, por ejemplo, la segunda ecuación del sistema (2) por la ecuación que resulta de multiplicar por -2 (distinto de cero) dicha (segunda) ecuación y de sumarle la primera multiplicada por 3 y la tercera multiplicada por -4:

$$(1^a \text{ ecuación}) \,.\, 3: 9y - 15z = -3$$

$$(2^a \text{ ecuación}) \,.\, (-2): -2x + y - 2z = -14$$

$$(3^a \text{ ecuación}) \,.\, (-4): 4x - 8y + 12z = 4$$

Sumando se obtiene la ecuación:

$$2x + 2y - 5z = -13.$$

Sustituyendo ahora la segunda ecuación de (2) por esta nueva ecuación obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3y - 5z = -1 \\ 2x + 2y - 5z = -13 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

que es equivalente al sistema (2).

En resumen, si en un sistema se efectúan una o varias de las transformaciones siguientes:

- Cambiar el orden de sus ecuaciones,
- Cambiar el orden de sus incógnitas,
- Multiplicar los coeficientes y el término independiente de una ecuación por un número distinto de cero,
- Sustituir una ecuación del sistema por la ecuación que resulta al multiplicar aquélla por un número real distinto de cero y sumarle otras ecuaciones del sistema multiplicadas por números reales cualesquiera.

Entonces el sistema de partida se transforma en otro sistema equivalente.

7.4 Resolución de sistemas.

Exponemos a continuación el método de sustitución y el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones.

- El método de sustitución consiste en despejar primero una incógnita en una ecuación cualquiera del sistema y sustituir después en las demás ecuaciones dicha incógnita por el valor obtenido al despejar.

7.4.1 Ejemplo

Resolveremos el siguiente sistema usando el método de sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ -3x + y - 3z = -3 \end{array}\right\}.$$

Despejando, por ejemplo, la incógnita y en la primera ecuación obtenemos:

$$y = 2x + z - 2 \qquad (1)$$

Sustituyendo y por ese valor en las ecuaciones segunda y tercera,

resulta el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2\,(2x+z-2)\,-z=1 \\ -3x+2x+z-2-3z=-3 \end{array}\right\},$$

operando:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+z=5 \\ -x-2z=-1 \end{array}\right\}.$$

Despejando por ejemplo x en la segunda ecuación obtenemos:

$$x=1-2z \qquad (2)$$

y sustituyendo en la primera, resulta

$$5(1-2z)+z=5 \rightarrow 5-10z+z=5 \rightarrow -9z=0 \rightarrow z=0.$$

Sustituyendo ahora en (2) resulta

$$x=1-2.0=1,$$

y sustituyendo x y z en (1) por sus valores $x=1$, $z=0$, se tiene:

$$y=2+0-2=0.$$

Luego la solución del sistema es $x=1$, $y=0$, $z=0$.

Como el sistema tiene una única solución se trata de un sistema compatible determinado, según las definiciones del apartado 7.2.

- Resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas por el método de Gauss consiste en obtener mediante las transformaciones que aparecen en el apartado 7.3, otro sistema equivalente a él que tenga una expresión de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n=d_1 \\ c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \ldots \\ c_{nn}x_n=d_n \end{array}\right\}$$

(siendo $c_{11}\neq 0, c_{22}\neq 0, \ldots, c_{n-1,n-1}\neq 0, c_{n,n}\neq 0$) y resolver este último.

Nótese que resolver el sistema obtenido por sustitución es muy sencillo ya que x_n se despeja inmediatamente de la n-ésima ecuación:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}.$$

A continuación sustituyendo en la ecuación (n-1)-ésima podemos despejar x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - c_{n-1n} \cdot \frac{d_n}{c_{nn}}}{c_{n-1n-1}},$$

y así sucesivamente.

Consideremos un sistema (genérico) de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$

- Para aplicar el método de Gauss se siguen los siguientes pasos:

- Paso 1: Si $a_{11} \neq 0$ pasamos al siguiente paso; en caso contrario cambiamos de orden las ecuaciones o las incógnitas para conseguirlo.
- Paso 2: Se multiplican los coeficientes y el término independiente de la primera ecuación por $\frac{1}{a_{11}}$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \rightarrow$$

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (E1)$$

- Paso 3: Se sustituye la segunda ecuación por la ecuación que resulta de restar a la segunda ecuación la ecuación (E1) multiplicada por el coeficiente a_{21}, es decir por el coeficiente de x_1 en tal ecuación:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \rightarrow$$
$$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2)-$$

$$a_{21}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=\frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

y operando se obtiene la siguiente nueva ecuación:

$$\left(a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\ldots+\left(a_{2n}-a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n=b_2-a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}\quad\text{(E2)}.$$

- Paso 4: Se realiza la misma operación que con la ecuación segunda con la tercera, cuarta, ..., n-ésima. Es decir se sustituye cada i-ésima ecuación, con $i > 1$, por la ecuación que resulta de restar a la i-ésima ecuación la ecuación (E1) multiplicada por el coeficiente a_{i1}. Así se obtiene la ecuación (Ei):

$$\left(a_{i2}-a_{i1}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\ldots+\left(a_{in}-a_{i1}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n=b_i-a_{i1}\frac{b_1}{a_{11}}\quad\text{(Ei)}.$$

- Paso 5: Después de los pasos anteriores se obtiene un nuevo sistema de n ecuaciones con n incógnitas, pero la incógnita x_1 sólo aparece en la primera ecuación, así las n-1 últimas ecuaciones se pueden considear como un sistema de n-1 ecuaciones con n-1 incógnitas. Aplíquese de nuevo todo el proceso, desde el paso 1, al sistema formado por las n-1 últimas ecuaciones. De este modo se eliminará otra incógnita de otras n-2 ecuaciones y repitiendo de nuevo varias veces el proceso se alcanzará finalmente un sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1\\ c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n&=d_2\\ &\ldots\\ c_{nn}x_n&=d_n\end{aligned}\right\}.$$

7.4.2 Ejemplo

Resuélvase por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y-3z&=1\\ -x+2y-z&=5\\ 3x+y+z&=1\end{aligned}\right\}.$$

Como el coeficiente de x en la primera ecuación es diferente de cero no necesitamos realizar el primer paso. Realizamos el segundo, es decir, multiplicamos la primera ecuación por $\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ -x+2y-z=5 \\ 3x+y+z=1 \end{array}\right\}.$$

Ahora el siguiente paso consiste en restar a la segunda ecuación la primera multiplicada por (-1), coeficiente de x en la segunda ecuación. Es decir, en este caso tenemos que sumar a la segunda ecuación la primera:

$$\left.\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}y-\frac{5}{2}z=\frac{11}{2} \\ 3x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Restamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por 3 (coeficiente de x en la tercera ecuación):

$$\left.\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}y-\frac{5}{2}z=\frac{11}{2} \\ \frac{5}{2}y+\frac{11}{2}z=-\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Obsérvese como en las dos últimas ecuaciones no aparece ya la incógnita x. Para simplificar los cálculos podemos ahora multiplicar por dos las dos últimas ecuaciones, resultando:

$$\left.\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ 3y-5z=11 \\ 5y+11z=-1 \end{array}\right\}.$$

A continuación aplicaremos el proceso a las dos últimas ecuaciones. En primer lugar dividimos por 3 la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ y-\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \\ 5y+11z=-1 \end{array}\right\}.$$

Seguidamente restamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 5:

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ y-\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \\ \frac{58}{3}z=-\frac{58}{3} \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación tenemos que $z=-1$. Sustituyendo z por -1 en la segunda ecuación tenemos:

$$y-\frac{5}{3}(-1)=\frac{11}{3}\rightarrow y=\frac{11}{3}-\frac{5}{3}\rightarrow y=2.$$

Por último, sustituyendo y por 2 y z por -1 en la primera ecuación resulta:

$$x-\frac{2}{2}-\frac{3(-1)}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow x=0.$$

Luego la solución del sistema es $x=0, y=2, z=-1$.

7.5 Matrices asociadas a un sistema.

Como hemos visto en el ejemplo 7.4.2 de la sección anterior, al aplicar el método de Gauss para resolver un sistema lo que realmente interesa y se modifica son los coeficientes y los términos independientes. En aras de una mayor rapidez y comodidad, introduciremos una notación (matriz de los coeficientes y matriz ampliada) que permitirá aplicar directamente el método de Gauss de

forma más económica sobre todo cuando el número de ecuaciones e incógnitas sea elevado.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

se denomina *matriz de coeficientes* de dicho sistema al conjunto de sus coeficientes dispuestos en forma de tabla de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

si a la matriz de los coeficientes le añadimos los términos independientes se obtiene la llamada *matriz ampliada* :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes y término independiente de la ecuación i-ésima situados en la matriz ampliada forman la *fila* i-ésima de dicha matriz. Los coeficientes que multiplican a la incógnita j-ésima forman la *columna* j-ésima.

Para resolver un sistema por el método de Gauss bastará realizar el proceso descrito en la sección anterior sobre la matriz ampliada del

sistema. Veámoslo con un ejemplo:

7.5.1 Ejemplo

Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z-2u=1 \\ x-y-3z+u=-12 \\ x-y-z-u=-6 \\ x+y+z+u=10 \end{array}\right\},$$

la matriz de los coeficientes de tal sistema es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

la matriz ampliada es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

a continuación resolveremos el sistema modificando simplemente esta matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

las operaciones que hemos realizado son:

(1) hemos intercambiado de lugar los coeficientes y términos independientes correspondientes a la primera y la segunda ecuación.

(2) hemos sumado a la segunda fila la primera multiplicada por -2.

Continuando el proceso de resolución de Gauss obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 22 \end{bmatrix}.$$

Los pasos que hemos efectuado son:
(1) restamos la primera fila a la tercera fila,
(2) restamos la primera fila a la cuarta fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 22 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \end{bmatrix}.$$

Donde hemos realizado los cambios siguientes:
(1) dividimos por 2 la cuarta fila,
(2) intercambiamos la segunda con la cuarta fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 25 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \end{bmatrix},$$

(1) hemos restado a la cuarta fila la segunda multiplicada por 3,
(2) hemos dividido por 2 la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix},$$

donde simplemente hemos sumado a la cuarta fila la tercera.

El sistema correspondiente a la última matriz ampliada es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 3z + u = -12 \\ y + 2z = 11 \\ z - u = 3 \\ -5u = -5 \end{array}\right\}$$

Despejando u en la cuarta ecuación resulta u = 1. Sustituyendo en la tercera y despejando z tenemos z = 3 + 1 = 4. De la segunda ecuación, sustituyendo z por 4 obtenemos y = 11 - 8 = 3. Por último, sustituyendo y por 3, z por 4 y u por 1 en la primera ecuación obtenemos:

$$x = -12 + 3 + 12 - 1 = 2.$$

Luego la solución del sistema es $x = 2, y = 3, z = 4, u = 1$.

• Nótese que al aplicar el método de Gauss sobre la matriz ampliada se debe tener la precaución de conocer la incógnita a que corresponden los coeficientes de cada columna, sobre todo al cambiar de lugar columnas. Tal cuidado se puede conseguir escribiendo bajo cada columna el nombre de la incógnita a que corresponde.

Notas Históricas

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático, físico y astrónomo alemán que por sus numerosas e importantes aportaciones puede ser considerado el mayor de los matemáticos de todos los tiempos. Entre sus muchas contribuciones está el teorema que asegura que toda ecuación polinómica de grado n tiene n raices.

7.6 Ejercicios

1.- Determinar cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles y cuáles son incompatibles:

a) $\left.\begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{3}{10}z=0 \end{array}\right\}$, b) $\left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ 2x-y=7 \\ -x+2y=7 \end{array}\right\}$, c) $\left.\begin{array}{c} x+y+2z=7 \\ 2x+y-z=3 \\ y+z=7 \\ z=2 \end{array}\right\}$.

2.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{c} 2x+y=7 \\ x-3y=2 \end{array}\right\}$, b) $\left.\begin{array}{c} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$.

3.- Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 5x-5y-6z=5 \\ 5x+3y-z=10 \\ 3x+2y+7z=2 \end{array}\right\}.$$

4.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} x+2y+3z+u=9 \\ x+3y+2u=7 \\ 2x-z+3u=2 \\ 3x+2y-z+u=11 \end{array}\right\}.$$

5.- De una caja que contiene piezas de los tipos A y B, se desea determinar su peso y el peso de cada una de las piezas. Para ello se sabe que:

a) Dos cajas y una pieza A pesan 19 Kg.

b) Una pieza A y una caja de la cual se han extraido dos piezas B pesan 6 Kg.

c) Tres cajas, una pieza A y tres piezas B pesan 34 Kg.

TEMA 8

Matrices y determinantes

Como se ha visto en el tema anterior, al resolver sistemas de ecuaciones por el método de Gauss, el utilizar la matriz ampliada simplifica considerablemente los trámites de resolución. Esta simplificación es tanto más notable cuanto mayor es el número de incógnitas que intervienen en el sistema. Esto lleva a introducir y estudiar las matrices en sí mismas, puesto que serán una herramienta de gran utilidad en capítulos posteriores.

8.1 Matrices

Se denomina *matriz de* m *filas y* n *columnas* a todo conjunto de m . n números reales distribuidos en m filas y n columnas de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En adelante a la matriz anterior la representaremos por (a_{ij}), donde $i = 1, 2, \ldots, m$, y $j = 1, 2, \ldots, n$. Los números a_{ij} se denominan *elementos* de la matriz.

Una matriz de m filas y n columnas, se dice que es:

- Una *matriz cuadrada* cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, cuando $m = n$.

- Una *matriz rectangular* cuando el número de filas es distinto al número de columnas, es decir , cuando $m \neq n$.

- Una *matriz fila* cuando el número de filas es 1, esto es, cuando $m = 1$.

- Una *matriz columna* cuando el número de columnas es 1, o sea, si $n = 1$.

Las matrices cuadradas destacan por su importancia dentro del conjunto de las matrices. Podemos clasificarlas en distintos tipos. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de n filas y n columnas.

- A es una matriz *simétrica* cuando $a_{ij} = a_{ji}$, cualesquiera que sean $i = 1, 2, \ldots, n$, y $j = 1, 2, \ldots, n$.

- A es una matriz *triangular superior* cuando $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y todo $j = 1, 2, \ldots, n$, con $i > j$.

- A es una matriz *triangular inferior* cuando $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y todo $j = 1, 2, \ldots, n$, con $i < j$.

- A es una matriz *triangular* cuando es una matriz triangular superior o inferior.

- A es una matriz *diagonal* cuando $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y todo $j = 1, 2, \ldots, n$, con $i \neq j$.

- A es una *matriz cero* cuando todos sus elementos son iguales a cero, es decir, si $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

- A es una matriz unidad cuando es una matriz diagonal y $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de m filas y n columnas, diremos que A es una matriz m x n.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de n filas y n columnas, diremos que A es una matriz cuadrada *de orden n*. Se denomina *diagonal principal* de dicha matriz a la n-upla $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

8.1.1 Ejemplos

Las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

son, respectivamente:

a) una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas.
b) una matriz de 2 filas y 5 columnas.
c) una matriz de 3 filas y 2 columnas.
d) una matriz de 1 fila y 6 columnas.
e) una matriz de 4 filas y 1 columna.
f) una matriz cuadrada simétrica de orden 5.
g) una matriz triangular inferior.
h) una matriz triangular superior.
i) la matriz cero de orden 3.
j) la matriz unidad de orden 2.
k) una matriz diagonal de orden 4. Nótese, en este caso, que $a_{ii} = 2$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$, y por tanto, no se trata de una matriz unidad.

Se dice que dos matrices A y B son *iguales* cuando tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas y los elementos correspondientes son iguales. Es decir, si $A = (a_{ij})$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, y $j = 1, 2, \ldots, n$; $B = (b_{ij})$, con $i = 1, 2, \ldots, p$, y $j = 1, 2, \ldots, q$; entonces $A = B$ si y sólo si $m = p$, $n = q$, y $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$, y $j = 1, 2, \ldots, n$.

8.2 Operaciones con matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices m x n.

Se llama *suma* de estas dos matrices a la matriz $C = (c_{ij})$, también m x n, cuyos elementos c_{ij} son suma de los correspondientes elementos de A y B. Es decir $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, y todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

En adelante a la matriz C la designaremos por A + B.

8.2.1 Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para enunciar las propiedades de la suma de matrices, consideremos tres matrices genéricas A, B y C, con m filas y n columnas.

La suma de matrices tiene las siguientes propiedades:

- Asociativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

- Conmutativa:

$$A + B = B + A.$$

- Existencia de matriz cero:

Existe una matriz m x n cuyos elementos son todos cero. A esta matriz la designaremos por 0_{mn} (y cuando no haya posibilidad de confusión, simplemente por 0). Tiene la propiedad

$$0_{mn} + A = A + 0_{mn} = A,$$

para cualquier matriz, A, m x n.

- Existencia de matriz opuesta:

Para toda matriz A existe una única matriz, que se denomina *matriz opuesta* de la matriz A, que denotaremos por - A, cuyos elementos son los opuestos de los de A, es decir, si $A = (a_{ij})$, $-A = (-a_{ij})$, y que satisface

$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$

8.2.2 Ejemplo

Si A es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

su matriz opuesta es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $A + (-A) = 0_{32}$.

Se llama producto de un número real λ por una matriz $A = (a_{ij})$, a la matriz, que designaremos por λA, cuyos elementos se obtienen multiplicando los elementos de A por λ. Es decir,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

8.2.3 Ejemplo

El producto del número real - 3 por la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix},$$

es la matriz

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 9 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

El producto de un número real por una matriz tiene las siguientes propiedades, donde λ y μ son números reales y A y B son matrices m x n.

- $\lambda\, 0_{mn} = 0_{mn}$.
- $(\lambda\,\mu)\, A = \lambda\,(\mu\, A)$.
- $(\lambda + \mu)\, A = \lambda\, A + \mu\, A$.
- $\lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B$.
- $0\, A = 0_{mn}$.
- $1\, A = A$.
- $-A = (-1)\, A$ y $A = (-1)\,(-A)$.

A continuación, definimos el producto de matrices y enunciamos sus propiedades.

Sean A una matriz m x n y B una matriz n x p.

Se llama producto de las matrices A y B anteriores a otra matriz m x p, $C = A \cdot B$, cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, y todo $j = 1, 2, \ldots, p$.

• Nótese que cada elemento c_{ij} de la matriz producto $C = A \cdot B$, se obtiene como suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila i-ésima de la matriz A, por los elementos de la columna j-ésima de la matriz B. Además debe tenerse muy en cuenta que para multiplicar una matriz A por una matriz B, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.

8.2.4 Ejemplos

a) El producto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

no puede efectuarse ya que el número de columnas de la primera matriz no es igual al número de filas de la segunda.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

3x2 2x3 3x3

8.2.5 Ejemplo

Calculamos $A^2 = A \cdot A$, donde A es la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces A^2 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

En general, $A^n = A \cdot \ldots {}^{n} \ldots \cdot A$, para toda matriz cuadrada A y todo número natural n.

Las propiedades del producto de matrices son las siguientes:

- Asociativa:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

donde A es una matriz m x n, B una matriz n x p y C una matriz p x q.

- Distributiva:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

donde A es una matriz m x n, y B y C son matrices n x p.

$$(D + E) \cdot F = D \cdot F + E \cdot F,$$

donde D y E son matrices m x n y F es una matriz n x p.

- Matriz unidad:

Sea A una matriz cuadrada de orden n, y sea I_n la matriz cuadrada unidad de orden n, que recordemos que tiene todos los elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal, que son todos iguales a 1. Entonces

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Si en una matriz A, m x n, cambiamos sus filas por sus columnas y viceversa, obtenemos una nueva matriz, n x m, que llamaremos *matriz traspuesta* de A y que designaremos por A^t.

Sea $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$; la matriz traspuesta de A, A^t, es la matriz (b_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$; cuyos elementos son

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

8.2.6 Ejemplos

a) La traspuesta de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

es la matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Las propiedades de la matriz traspuesta son las siguientes, donde A y B son matrices m x n, y C es una matriz n x p:

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, para todo número real λ.
- $(A \cdot C)^t = C^t \cdot A^t$.
- $(I_n)^t = I_n$, para todo número natural n.

- Si D es una matriz cuadrada simétrica, entonces $D^t = D$.

8.2.7 Ejemplo

Calcúlese la matriz D tal que $D - 2(A \cdot B + C)^t = I_3$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución

Aplicamos las propiedades vistas anteriormente. Como

$$D - 2(A \cdot B + C)^t = I_3,$$

resulta que

$$D = I_3 + 2(A \cdot B + C)^t = I_3 + 2((A \cdot B)^t + C^t).$$

Para calcular $(A \cdot B)^t$ podemos seguir dos caminos: o bien efectuar el producto y luego hallar la traspuesta, o bien efectuar el producto $B^t \cdot A^t$. Lo haremos por el primer método.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

cuya traspuesta es

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente $2((A \cdot B)^t + C^t)$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & -8 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & -8 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -8 \\ 2 & 9 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

8.3 Determinantes

En esta sección procederemos por pasos. En primer lugar definiremos el determinante de una matriz cuadrada de orden 2. Después se estudiará el caso de una matriz cuadrada de orden 3 y, finalmente, se estudiará el determinante de una matriz cuadrada de orden n.

Consideremos una matriz cuadrada de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

El número $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$, se llama *determinante de la matriz* A, y se designa por $|A|$.

8.3.1 Ejemplos

Calculemos el determinante de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 5,$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 = -1.$$

Consideremos ahora una matriz cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Llamamos determinante de la matriz de orden 3, A, al número

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Esta definición no es fácil de recordar por lo que vamos a transformar la expresión que aparece en el segundo miembro. Observemos los términos 1° y 2°. Vemos que se puede sacar factor común a_{11} y escribirlos en la forma

$$a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}).$$

Ahora bien, el número $a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$ es el determinante de la matriz cuadrada de orden 2:

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Análogamente, podemos sacar factor común a_{12} en los términos 3° y 4°, y a_{13} en los términos 5° y 6°, y escribir

$$-a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}),$$

$$a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Por tanto, podemos escribir finalmente

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

8.3.2 Ejemplo

Calcúlese el determinante de la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

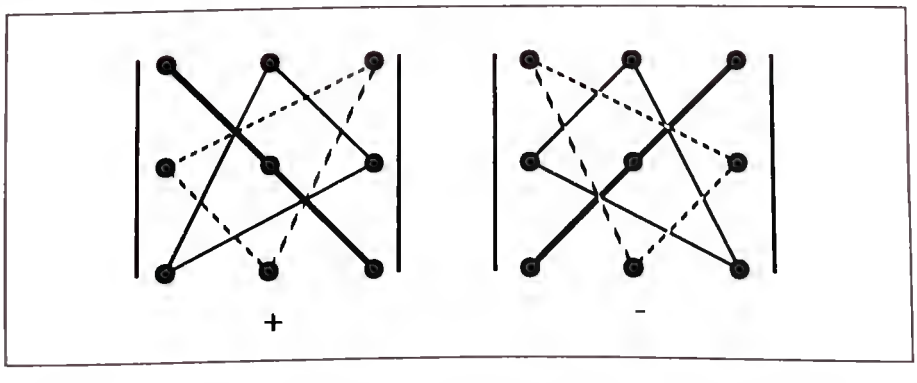
Solución

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 12 - 4 = -21.$$

Volvamos de nuevo al número

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

que habíamos dado como definición de determinante de una matriz cuadrada de orden 3, A. Vamos a ver una regla para calcularlo directamente que, naturalmente, coincide con el procedimiento anterior. Representaremos en la siguiente figura los elementos de la matriz por puntos. Los puntos unidos por rectas del mismo tipo deberán multiplicarse. Los productos de la parte izquierda de la figura irán con signo '+' y los de la derecha con signo '-'.



Volvamos a calcular el determinante del ejemplo 8.3.2, según esta regla:

$$|A| = 1.2.(-1) + 0.1.(-1) + 2.3.(-2) - (-2).2.(-1) - 1.3.1 - 0.2.(-1) = -21.$$

Estudiaremos ahora el determinante de una matriz cuadrada de orden n. Previamente, necesitaremos unos conceptos auxiliares.

Dada la matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, llamaremos *matriz complementaria* del elemento a_{ij} a la matriz cuadrada de orden n - 1, que designaremos por A_{ij}, que se obtiene al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima de A.

8.3.3 Ejemplo

Dada la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

las matrices complementarias de los elementos a_{21} y a_{33} son, respectivamente las matrices:

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dada la matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, se llama *menor complementario* del elemento a_{ij}, al determinante de la matriz A_{ij}, $|A_{ij}|$.

8.3.4 Ejemplo

Para la matriz del ejemplo 8.3.3, tenemos que los menores complementarios de los elementos a_{21} y a_{33} serán

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Haciendo uso de los menores complementarios de los elementos de la primera fila, podemos volver a escribir el determinante de A del siguiente modo:

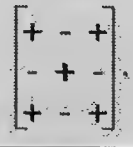
$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|.$$

Volvamos a la definición inicial del determinante de una matriz A de orden 3, que es el número:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Se observa que cada uno de los elementos de A aparece en dos términos. Como hicimos antes con los elementos de la primera fila, si seleccionamos los elementos de una fila o de una columna cualquiera, podemos sacarlos factor común y obtenemos entonces:

El determinante de una matriz A de orden 3 se obtiene como la suma algebraica de los productos de los elementos de una fila o de una columna cualquiera por sus respectivos menores complementarios. El signo que corresponde a cada producto se obtiene del esquema:



Observemos que el signo de $a_{ij}\,|A_{ij}|$ es '+' si $i+j$ es par, y '-' si $i+j$ es impar. Por tanto, podemos reescribir la regla anterior del siguiente modo:

$$|A| = (-1)^{i+1}\, a_{i1}\, |A_{i1}| + (-1)^{i+2}\, a_{i2}\, |A_{i2}| + (-1)^{i+3}\, a_{i3}\, |A_{i3}|,$$

si desarrollamos $|A|$ por los elementos de la fila i-ésima. De un modo análogo,

$$|A| = (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, |A_{1j}| + (-1)^{2+j}\, a_{2j}\, |A_{2j}| + (-1)^{3+j}\, a_{3j}\, |A_{3j}|,$$

si desarrollamos $|A|$ por los elementos de la columna j-ésima.

8.3.5 Ejemplo

Calculemos el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Solución

Desarrollemos por los elementos de la primera columna:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6.$$

Volvemos a calcular $|A|$ desarrollandolo esta vez por la segunda fila.

$$|A| = 0\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6,$$

que, naturalmente nos proporciona el mismo resultado.

- En la práctica, vemos que conviene desarrollar por la fila o columna que contenga más ceros, ya que ahorra cálculos.

Estamos ya en condiciones de calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden n, en general. El procedimiento es el mismo: desarrollar por los menores complementarios de los elementos de una fila o columna cualquiera, con el signo que corresponda. Estos menores serán de orden n - 1, que desarrollamos a su vez. Se va reduciendo así el orden de los menores en cada caso, hasta que llegamos a menores de orden 3, que sabemos calcular.

El signo que corresponde a cada producto $a_{ij}\,|A_{ij}|$ es $(-1)^{i+j}$. Veamos un ejemplo de orden 5.

8.3.6 Ejemplo

Calcúlese el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solución

Observemos que la cuarta columna tiene tres ceros. Desarrollamos por esa columna entonces. El determinante $|A|$ será

$$|A| = (-1)^{1+4} a_{14} |A_{14}| + (-1)^{2+4} a_{24} |A_{24}| + (-1)^{3+4} a_{34} |A_{34}|$$

$$+ (-1)^{4+4} a_{44} |A_{44}| + (-1)^{5+4} a_{54} |A_{54}|.$$

Y sustituyendo por los valores correspondientes, tenemos

$$|A| = -(-2) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

y ahora calculamos los dos determinantes de orden 4. Como observamos que la tercera fila de ambos contiene un cero los desarrollamos por esa tercera fila.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

y, calculando los determinantes de orden 3, obtenemos:

$$5 \cdot 82 - 1 \cdot (-147) - 1 \cdot 83 = 474.$$

Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

es

$$2 \cdot (-147) + 1 \cdot (-7) - 4 \cdot 83 = -633.$$

Por tanto

$$|A| = 2 \cdot 474 + 2 \cdot (-633) = -318.$$

8.4 Propiedades de los determinantes

Enunciamos a continuación las propiedades de los determinantes. Como siempre, $A = (a_{ij})$ será una matriz cuadrada de orden n.

- El determinante de A y el de su matriz traspuesta son iguales, es decir $|A| = |A^t|$.

De esta propiedad resulta inmediatamente que las propiedades que siguen son igualmente válidas si sustituimos en ellas la palabra *fila* por la palabra *columna.*

- Si se multiplican todos los elementos de una fila de A por un número real, λ, se obtiene otra matriz B tal que $|B| = \lambda |A|$. Es decir el determinante queda multiplicado por λ.

8.4.1 Ejemplo

$$3\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 = 36, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36.$$

- Sean A, B y C tres matrices cuadradas de orden n tales que los elementos de esas tres matrices son iguales para todas las filas excepto para la fila i-ésima, y para esta fila se satisface que $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $|A| = |B| + |C|$.

8.4.2 Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 10, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 29 + (-19) = 10.$$

- Si en la matriz A intercambiamos dos filas cualesquiera entre sí, la matriz B que se obtiene cumple que $|B| = -|A|$.

De esta propiedad se deduce inmediatamente que si A tiene dos filas iguales entonces $|A| = 0$.

Combinando esta propiedad con la segunda vista antes se tiene que:

- Si la matriz A tiene dos filas proporcionales entonces $|A| = 0$.

8.4.3 Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

- Si a los elementos de una fila de A les sumamos los elementos de otra fila multiplicados por un número real λ, la matriz que se obtiene, B, tiene el mismo determinante que A.

8.4.4 Ejemplo

El determinante de la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

es 25. Sea B la matriz obtenida a partir de A sumando a los elementos de la primera fila los de la tercera multiplicados por -2. Entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 25.$$

Esta propiedad es muy importante para el cálculo práctico de los determinantes, cuando el orden es mayor que 3, ya que nos permite sustituir elementos no nulos por ceros, lo que disminuye el número de operaciones. Veámoslo en un ejemplo concreto, donde la matriz A es la del ejemplo 8.3.6.

8.4.5 Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sustituyamos la tercera fila por la suma de ella y la cuarta. Tenemos la nueva matriz B:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

y desarrollando por la cuarta columna vemos que ahora hay que calcular tan sólo un determinante de orden 4 y no dos, como en el ejemplo 8.3.6. Tenemos ahora, por tanto

$$|A| = |B| = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2|C|.$$

En la matriz C haremos lo mismo, pero haciendo varios pasos simultáneamente. A la segunda fila le sumaremos la primera multiplicada por 4, a la tercera fila le sumaremos la primera multiplicada por 5 y a la cuarta fila le sumaremos la primera multiplicada por 3. El objetivo es obtener una columna en la que todos los términos salvo el primero sean 0. Llegamos así a la matriz D:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 14 & -7 & 17 & 0 \\ 20 & -11 & 26 & 0 \\ 7 & -3 & 19 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $|D| = |C|$ es

$$-(-1)\begin{vmatrix} 14 & -7 & 17 \\ 20 & -11 & 26 \\ 7 & -3 & 19 \end{vmatrix},$$

y ya sólo tenemos que calcular un determinante de orden 3, que es -159. Por tanto

$$|A| = 2(-159) = -318.$$

La última propiedad de los determinantes que enunciaremos es relativa al determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden:

- $|A \cdot B| = |A|\,|B|$.

8.5 Matriz inversa de una matriz cuadrada

Diremos que la matriz cuadrada A de orden n es *inversible*, o que tiene *inversa*, si existe otra matriz cuadrada de orden n, que designaremos por A^{-1}, que satisface

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

La matriz A^{-1} recibe el nombre de *matriz inversa* de la matriz A.

Las principales propiedades de la matriz A^{-1} son

- Es única, es decir si existe otra matriz cuadrada de orden n, B, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, entonces $B = A^{-1}$.

- Si una matriz A tiene inversa, entonces $|A| \neq 0$, ya que existe A^{-1}, y por la propiedad del determinante del producto de dos matrices, vista anteriormente, se tiene

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_n| = 1,$$

donde

$$|A \cdot A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|,$$

e igualando obtenemos que

$$|A|\ |A^{-1}| = 1,$$

luego $|A| \neq 0$.

Resulta que la condición anterior no sólo es necesaria sino que es también suficiente para la existencia de la matriz inversa. Resumimos el resultado:

Una matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Veamos ahora cómo se obtiene la matriz inversa de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, con $|A| \neq 0$.

En primer lugar obtenemos la matriz traspuesta de A, A^t.

A continuación, sustituimos cada elemento de la matriz A^t por su menor complementario, con el signo que le corresponda. La matriz así obtenida se llama *matriz adjunta* de la matriz A.

Por último, se divide cada elemento de la matriz obtenida en el paso anterior por |A|.

8.5.1 Ejemplo

Calculemos la inversa de la matriz A

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante, como se comprueba fácilmente es 6. La traspuesta A^t es la matriz

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculamos ahora los menores complementarios $|B_{ij}|$ de los elementos de esta matriz, afectándolos del signo que les corresponda, es decir, multiplicándolos por $(-1)^{i+j}$:

$$|B_{11}| = 2, \quad -|B_{12}| = -(-4) = 4, \quad |B_{13}| = -2,$$
$$-|B_{21}| = -4, \quad |B_{22}| = 1, \quad -|B_{23}| = -(-1) = 1,$$
$$|B_{31}| = 2, \quad -|B_{32}| = -(-1) = 1, \quad |B_{33}| = 1.$$

Obtenemos entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y dividimos cada elemento por $|A| = 6$. Obtenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, comprobemos que la anterior matriz es A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

8.6 Ejercicios

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinar las siguientes matrices:

a) $2A+3D$, b) $A \cdot B$, c) $A^2 - 2D^2$.

2.- Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar las matrices A^n, con n natural.

3.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

4.- Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.- Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar algún número real λ tal que satisfaga la ecuación

$$|A - \lambda I_3| = 0.$$

TEMA 9

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

En este tema se estudian los métodos de Cramer y Rouché - Fröbenius para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que son de gran utilidad y completan los métodos expuestos en el tema 7.

9.1 Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma siguiente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

podemos considerar su matriz de coeficientes(ver la definición en 7.5),

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

y las matrices columna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

teniendo en cuenta ahora lo estudiado en el tema 8 acerca del producto y la igualdad de matrices, se puede dar la siguiente expresión matricial del sistema anterior :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

o abreviadamente, $A \,.\, X = B$.

Una n-tupla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ es una solución del sistema anterior cuando $A \,.\, C = B$, siendo

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

9.1.1 Ejemplo

Escribir la expresión matricial del siguiente sistema:

$$2x - 5y + 4z + u = -3$$
$$x - 2y + z - u = 5$$
$$x - 4y + 6z + 2u = 10.$$

Solución

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

y las matrices columna de las incógnitas y los términos independientes son respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la expresión matricial del sistema anterior será $A \cdot X = B$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

9.1.2 Ejemplo

Escribir la expresión matricial del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=1\\ -2x+z-t&=0\\ y-2t&=2\\ 3x+6y-2z&=1\\ -x+y+2z&=1. \end{aligned}$$

Solución

La matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 6 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

y la matriz columna de sus términos independientes tiene la forma:

$$B=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 2\\ 1\\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que su expresión matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9.2 Regla de Cramer

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Según vimos en el apartado anterior, la expresión matricial de este sistema es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Con las notaciones del apartado anterior, la expresión matricial anterior la escribimos abreviadamente poniendo $A \cdot X = B$. Como en este caso la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada de orden n (siendo n el número de ecuaciones y de incógnitas del sistema), si existe la matriz A^{-1} (inversa de la matriz A), entonces multiplicando por A^{-1} los dos términos de la igualdad $A \cdot X = B$, se obtiene: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Teniendo en cuenta que $A^{-1} \cdot A = 1_n$, se tiene $1_n \cdot X = A^{-1} \cdot B$, luego

$X=A^{-1}$. B (dado que 1_n . X = X). Es decir, en caso de existencia de la matriz inversa de A el sistema es compatible determinado (admite una única solución, según las definiciónes del apartado 7.2) y su solución es $X = A^{-1}$. B. Evidentemente, si además $b_i = 0$ para todo i = 1, 2, ..., n, entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

y la única solución es la $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Por otra parte, de acuerdo con el teorema sobre la existencia de la matriz inversa de una matriz cuadrada (véase 8.5), resulta que la matriz A^{-1} existe si, y sólo si, $|A| \neq 0$, y podemos enunciar el siguiente teorema:

> Un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas, es *compatible determinado* si y sólo si, el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de cero. En este caso su solución (única) viene dada por $X = A^{-1}$. B, siendo A^{-1} la matriz inversa de su matriz de coeficientes A y B la matriz columna de sus términos independientes.

Recordando el cálculo de la matriz inversa efectuado en el apartado 8.5, resulta que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{n2} \\ . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{bmatrix} ,$$

siendo A^+ la matriz adjunta de la matriz A, y

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Por tanto,

$$x_i = \frac{I}{|A|} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) ,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. De donde, teniendo en cuenta la definición de determinante (véase el apartado 8.3 del tema anterior) resulta que

columna i-ésima

$$A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \cdots a_{2n} \\ \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot & & \\ \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot & & \\ \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot & & \\ a_{n1} \cdots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

y

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Lo anterior se puede enunciar de la manera siguiente:

Regla de Cramer.

Si un sistema de ecuaciones lineales, con igual número de ecuaciones que de incógnitas, verifica que su matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, entonces dicho sistema admite una única solución cuya componente i-ésima viene determinada por el resultado de dividir el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz de coeficientes del sistema la columna i-ésima por la columna de sus términos independientes, por el determinante de la matriz de coeficientes.

9.2.1 Ejemplo

Resolver si es posible el siguiente sistema, aplicando la Regla de Cramer:

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$y - 2z = 3.$$

Solución

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8+1+6-2 = -3 \ .$$

Como $|A| = -3 \neq 0$, el sistema anterior tiene una única solución que viene determinada por

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-\frac{1}{3})\,(-4+9-6+3) = -\frac{2}{3},$$

$$y = (-\frac{1}{3})\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-\frac{1}{3})\,(3+18+2) = -\frac{23}{3},$$

$$z = (-\frac{1}{3})\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-\frac{1}{3})\,(12+1+3) = -\frac{16}{3}.$$

Luego la solución del sistema es $x = -(2/3)$, $y = -(23/3)$, $z = -(16/3)$.

9.2.2 Ejemplo

Resolver mediante la Regla de Cramer el siguiente sistema:

$$x + 2y - z + u = -3$$
$$-x + z - 2u = 3$$
$$y - 2z - u = 1$$
$$2x - y - z = 3.$$

Solución

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 19.$$

Donde se han efectuado las siguientes operaciones para llegar al resultado:

1) sumar a la 2ª fila la 1ª.
2) sumar a la 4ª fila la 1ª multiplicada por (-2).
3) desarrollar por la 1ª columna.

Hallemos la solución (única) del sistema:

$$x=\frac{1}{19}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{19}\begin{vmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}19 = 1.$$

Donde se han efectuado las siguientes operaciones para llegar al resultado :

1) sumar la 1ª fila a la 2ª y a la 4ª.
2) sumar a la 1ª fila la 3ª multiplicada por 3.
3) desarrollar por la 1ª columna.

$$y = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{19}(-1)\,(-1)^5\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}(-19) = -1.$$

Donde se han efectuado las siguientes operaciones para llegar al resultado:

1) sumar a la 1ª fila la 2ª.
2) desarrollar por la 1ª fila.

$$z = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19}(-1)\,(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}0 = 0.$$

Donde se han efectuado las siguientes operaciones para llegar al resultado:

1) sumar a la 1ª fila la 2ª, y a la 4ª la 2ª multiplicada por 2.

2) desarrollar por la 1ª columna.

$$u = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{19} 2\,(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-2}{19} 19 = -2.$$

Donde se han efectuado las siguientes operaciones para llegar al resultado:

1) sumar la 2ª fila a la 1ª.

2) desarrollar por la 1ª fila.

Luego la solución del sistema es $x = 1, y = -1, z = 0$ y $u = -2$.

Notas Históricas

Gabriel Cramer (1704-1752) fue profesor de Matemáticas en Ginebra y puede considerarse como uno de los iniciadores del estudio de la Geometría Analítica. Su método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aparece por primera vez en su libro "Introducción al Análisis de las Curvas Algebraicas".

9.3 Rango de una matriz

Se llama *submatriz* de una matriz A a toda matriz que se obtenga suprimiendo un cierto número (que puede ser nulo) de filas y un cierto número (que puede ser nulo) de columnas de la matriz A.

9.3.1 Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Las siguientes matrices son algunas de las submatrices de la matriz A:
1) Suprimiendo en A la 1ª fila y la 4ª columna:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

2) Suprimiendo en A las columnas 1ª y 3ª:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3) Suprimiendo en A las filas 2ª, 3ª y 4ª:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se llama *menor* de una matriz $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, al determinante de cualquier submatriz cuadrada de la matriz A.

Llamamos *orden* del determinante de una matriz cuadrada B al orden de dicha matriz, que, como ya vimos en la definición dada en 8.1, es el número de filas (que coincide con el de columnas) de la matriz B.

9.3.2 Ejemplo

Si A es la matriz del ejemplo anterior, entonces $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 2 de dicha matriz y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 3 de la matriz A.

Se llama *rango* de una matriz al mayor de los órdenes de los menores no nulos de dicha matriz.

• De la definición anterior resulta que el rango de una matriz es siempre menor o igual que el menor de los números de sus filas y columnas. Es decir, rango(A) ≤ mínimo(m, n), siendo $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$,.

Damos a continuación unas reglas prácticas para el cálculo del rango de una matriz.

• Consideremos una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1°. El rango de la matriz A concide con el de la matriz que se obtiene suprimiendo en la matriz A todas la líneas (filas o columnas) cuyos elementos sean todos iguales a cero.

2°. Consideremos la submatriz $A_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ y supongamos que $a_{11} \neq 0$, entonces rango(A) ≥ rango(A_1) = 1.

3°. Añadamos filas (de la matriz A) a la matriz A_1 hasta encontrar una matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (1 < i \leq n),$$

que posea un menor no nulo de la forma $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0 \ (1< j \leq n)$.

Entonces, rango(A) $\geq$ rango(A_2) = 2. Si esto no es posible, entonces rango(A) = 1.

4º. Supongamos que rango(A) $\geq$ rango(A_2) y que i = 2 y j = 2. Añadamos filas a la matriz A_2 hasta encontrar una matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \ (2 < i \leq n),$$

de forma que A_3 posea un menor de orden 3 de la forma

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0 \ (2 < j \leq n)$. Entonces rango(A) $\geq$ rango(A_3) = 3.

En caso de que no hubiera sido posible encontrar dicho menor de orden 3, se tendría que rango(A) = rango(A_2) = 2.

Supuesto que rango(A) $\geq$ rango(A_3) y que i = 3 y j = 3, se procedería como en casos anteriores y así sucesivamente hasta agotar todas las filas de la matriz A.

9.3.3 Ejemplo

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Como $a_{11} = 1 \neq 0$, entonces rango(A) ≥ 1 y como además $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $1 - 6 = -5 \neq 0$, resulta que rango(A) ≥ 2. Añadimos ahora la tercera fila.

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, probamos con la cuarta columna: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $3 + 2 + 0 - 0 - 2 - 18 = -15 \neq 0$. Por consiguiente, rango(A) = 3.

9.3.4 Ejemplo

Calcular el rango de la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución

Como $a_{12} = -1$ resulta que rango(A) $\geq$ rango(A_1) = 1, siendo

$$A_1 = (0 \ -1 \ 2 \ 1).$$

Ampliamos ahora con la segunda fila: $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Dado que

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, se tiene que rango(A) ≥ rango(A_2) = 2.

Ampliamos con la tercera fila: $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1.(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0$ (desarrollando por los elementos de la tercera fila), resulta que rango(A) ≥ rango(A_3) = 3. Ampliando A_3 con la cuarta fila, se obtiene una nueva matriz con determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, que desarrollado por los elementos de la 3ª fila da :

$$1\,(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\,(-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= (-3 + 8 + 10 - 15 + 4 - 4) + (-20 + 12 + 16 - 8) = 0$. Si ampliamos A_3 con la quinta fila se obtiene una nueva matriz con determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= (6 + 4 - 6 + 3) + (- 8 + 3 + 4 - 6) = 0$. Por último, ampliando A_3 con la sexta fila se obtiene una nueva matriz con determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (6 - 2 + 3 + 8) + (4 - 3 - 4) = 12 \neq 0$, y, por tanto, rango(A) = 4, ya que de lo anterior resulta rango(A) ≥ 4, y además,

$$\text{rango(A)} \leq \text{mínimo}\{\text{número de filas de A, número de columnas de A}\} = \text{mínimo}\{7, 4\} = 4.$$

9.3.5 Ejemplo

Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

Como los elementos de la última columna son todos nulos resulta que el rango de la matriz A coincide con el de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculemos por tanto el rango de la matriz B. Rango(B) $\leq$ mínimo$\{5, 5\} = 5$. Además, como $a_{11} = 1 \neq 0$, se tiene que rango(B) ≥ 1. Ampliamos con la segunda fila. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resulta que rango(B) ≥ 2. Ampliamos con la tercera fila. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

resulta que rango(A) = rango(B) = 2.

9.4 Teorema de Rouché-Fröbenius

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* cuando sus términos independientes son todos nulos. En caso contrario se dice que el sistema es *no homogéneo*.

9.4.1 Ejemplo

El siguiente sistema es homogéneo:

$$x - 2y + 3z - u + v = 0$$
$$2x + z - 3u = 0$$
$$x + 2y - 3z - u - 2v = 0.$$

Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema no homogéneo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

es compatible si y sólo si

$$\text{rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = r,$$

lo que suele expresarse diciendo que el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Si el sistema anterior es compatible y $r = n$, entonces el sistema es *compatible determinado* y si $r < n$, entonces el sistema es *compatible indeterminado*.

9.4.2 Ejemplo

Discutir y resolver, en su caso, el siguiente sistema

$$2x - 5y + 4z + u = -3$$
$$x - 2y + z - u = 5$$
$$x - 4y + 6z + 2u = 10.$$

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Nótese que, en todo sistema, la matriz de coeficientes es una submatriz de la matriz ampliada y , por tanto, rango(A) $\leq$ rango(B). En este caso además, rango(A) $\leq$ rango(B) $\leq$ mínimo$\{3, 5\} = 3$.

Como $a_{11} = 2 \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0,$$

y

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 16 - 5 + 8 + 8 + 30 = 1 \neq 0,$$

resulta que 3 = rango(A) $\leq$ rango(B) $\leq$ 3 y, por tanto, rango(A) = rango(B) = 3 y el sistema es compatible. Como además el número (n) de incógnitas del sistema es 4, se tiene rango(A) = rango(B) = 3 < 4 y, por consiguiente, el sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos ahora el sistema. Como los coeficientes que componen el

menor no nulo de orden 3 que sirvió para determinar el carácter del sistema, corresponden a las incógnitas x, y, z, se considera el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 - u \\ x - 2y + z &= 5 + u \\ x - 4y + 6z &= 10 - 2u, \end{aligned}$$

en el que las incógnitas son x, y, z. Resolviendo este sistema mediante la regla de Cramer, resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3-u & -5 & 4 \\ 5+u & -2 & 1 \\ 10-2u & -4 & 6 \end{vmatrix}}{1} = 124 + 16u,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3-u & 4 \\ 1 & 5+u & 1 \\ 1 & 10-2u & 6 \end{vmatrix}}{1} = 75 + 9u, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-u \\ 1 & -2 & 5+u \\ 1 & -4 & 10-2u \end{vmatrix}}{1} = 31 + 3u$$

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema (inicial) es

$$\{(124 + 16u, 75 + 9u, 31 + 3u, u) : u \in \mathbf{R}\}.$$

9.4.3 Ejemplo

Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ -2x + z - t &= 0 \\ y - 2t &= 2 \\ ax + 2ay - 2z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

Solución

La matriz de los coeficientes de este sistema es:

9 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ a & 2a & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, resulta que rango(A) ≥ 3. Además, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ a & 2a & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8a - 10,$$

se tiene que si a= - (5/4), entonces el valor del último determinante es cero y, por consiguiente rango(A) = 3. Por el contrario si $a \neq -(5/4)$ el determinante anterior es distinto de cero y, por tanto rango(A) = 4.

La matriz ampliada del sistema que estamos estudiando es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & 2a & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & 2a & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para cualquier valor de a (nótese que la quinta fila es suma de las dos

primeras), resulta que si $a \neq -(5/4)$ entonces el rango(A) = rango(B) = 4 y el sistema es compatible determinado, ya que el sistema posee 4 incognitas. Si $a = -(5/4)$, entonces, por ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{-5}{4} & \frac{-5}{2} & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{51}{4} \neq 0 ,$$

se tiene que 3 = rango(A) ≠ rango(B) = 4 , luego el sistema en este caso es incompatible.

9.5 Sistemas homogéneos

Como ya se ha definido en 9.4, un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo, cuando sus términos independientes son todos iguales cero.

- Evidentemente, todo sistema homogéneo admite la solución

$$(0, 0, ..., 0),$$

que se denomina *solución trivial*.

Por otra parte, de la Regla de Cramer resulta que si un sistema homogéneo, con igual número de ecuaciones que de incógnitas, es tal que su matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, entonces dicho sistema no admite ninguna solución distinta de la trivial.

El siguiente resultado permite discutir los sistemas homogéneos, en general:

Un sistema homogéneo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0,$$

posee solución distinta de la trivial si, y solo si, el rango de su matriz de coeficientes es estrictamente menor que el número de sus incógnitas, es.decir, si, y sólo si

$$\text{rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} < n.$$

- De lo anterior resulta que todo sistema homogéneo, que posee alguna solución distinta de la trivial, es compatible indeterminado.

9.5.1 Ejemplo

Discutir y resolver, en su caso, el siguiente sistema:

$$x + 3y - v = 0$$
$$y + z + 2u = 0$$
$$-x - z + 3v = 0$$
$$2y + u + v = 0.$$

Solución

La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

se tiene que rango(A) = 3 y, por tanto, el sistema tiene solución distinta de la trivial, ya que su número de incógnitas es 5. Luego este sistema es compatible indeterminado. Como rango(A) =3 (según hemos visto) y

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

se tiene que el sistema que estamos estudiando es equivalente al que resulta de suprimir la cuarta ecuación, que será el siguiente:

$$x + 3y - v = 0$$
$$y + z + 2u = 0$$
$$-x - z + 3v = 0.$$

Considerando como incógnitas x, y, z (por ser precisamente los coeficientes correspondientes a ellas los que componen el menor no nulo que permitió determinar el rango de la matriz A), tenemos el

sistema

$$x+3y=v$$
$$y+z=-2u$$
$$-x-z=-3v.$$

Resolviendo este sistema mediante la aplicación de la Regla de Cramer, resulta que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} v & 3 & 0 \\ -2u & 1 & 1 \\ -3v & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{1}{2}(3u+5v),$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & v & 0 \\ 0 & -2u & 1 \\ -1 & -3v & -1 \end{vmatrix}}{-4}=-\frac{1}{2}(u+v)$$

y

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & v \\ 0 & 1 & -2u \\ -1 & 0 & -3v \end{vmatrix}}{-4}=-\frac{1}{2}(3u-v).$$

Por consiguiente, el conjunto de soluciones del sistema (inicial) es:

$$\left\{\left(\frac{3u+5v}{2},\ \frac{-u-v}{2},\ \frac{-3u+v}{2},\ u,\ v,\ \right):u,v\in \mathbf{R}\right\}.$$

9.5.2 Ejemplo

Hallar a y b para que el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial:

$$\begin{aligned} 2x - ay + bz &= 0 \\ x - ay + z &= 0 \\ 2y + 3z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Solución

Como se trata de un sistema homogéneo, su matriz de los coeficientes

$A = \begin{bmatrix} 2 & -a & b \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ debe ser tal que rango(A) < 3 (= número de incógnitas).

Dado que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, se tiene que rango(A) $\geq$ 2 y , por consiguiente, el sistema tendrá solución distinta de la trivial para todos aquellos valores de a y b para los que se anulen todos los posibles menores de orden 3, que en este caso son:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 9a \qquad y \qquad \begin{vmatrix} 2 & -a & b \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 9a - 6b.$$

Consideramos ahora el sistema formado por las ecuaciones que se obtienen al igualar a cero los menores de orden 3 anteriores:

$$\begin{aligned} 1 - 9a &= 0 \\ 14 - 9a - 6b &= 0. \end{aligned}$$

Despejando "a" en la primera ecuación resulta que $a = \frac{1}{9}$. Sustituyendo "a" por su valor en la segunda ecuación y despejando "b", se

obtiene: $14 - 1 - 6b = 0$ y, por tanto, $b = \frac{13}{6}$. Luego el sistema tiene solución distinta de la trivial cuando $a = \frac{1}{9}$ y $b = \frac{13}{6}$.

9.6 Ejercicios

1.- Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

2.- Resolver por la regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 4x - 3y + z &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + u &= 10 \\ x + 3y + 2u &= 7 \\ 2x - z + 3u &= 1 \\ 3x + 2y - z + u &= 9. \end{aligned}$

3.- Estudiar y resolver si es posible el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 5 \\
x + z &= 6 \\
y + z &= 7 \\
x + y + 2z &= 13 \\
2x + y + z &= 11.
\end{aligned}
$$

4.- ¿Tiene solución no trivial el siguiente sistema homogéneo?

$$
\begin{aligned}
x - y - z &= 0 \\
3x + 2y - 8z &= 0 \\
2x + y - 5z &= 0.
\end{aligned}
$$

5.- Estudiar y discutir el siguiente sistema para los distintos valores de $a \in \mathbf{R}$.

$$
\begin{aligned}
x + y - z &= 3 \\
3x + 4y - z &= 5 \\
x + y - az &= 3 \\
ax + 2y + (a+2)z &= a^2 - 2.
\end{aligned}
$$

TEMA 10

Elementos de geometría

La Geometría es una parte de las matemáticas que surge del estudio de las figuras como polígonos, circunferencias, curvas, tetraedros, poliedros, esferas, superficies, etc. Tal estudio está motivado por problemas prácticos de agricultura, arquitectura o ingeniería o cuestiones más teóricas de cosmología, matemáticas o filosofía. Comenzaremos nuestro estudio de la Geometría con algunas nociones sencillas con las que estamos seguros que todo lector está más o menos familiarizado.

10.1 Puntos y rectas

Hay ciertos términos cuyo significado consideramos obvio: punto, recta, plano. El *plano* es una superficie lisa (por ejemplo la superficie de un papel) que se extiende infinitamente en todas las direcciones. En este tema trabajaremos con figuras del plano. En la figura 1 hemos representado varios *puntos* en el plano, cada punto se representa por una letra mayúscula: P, A, B, V, X.

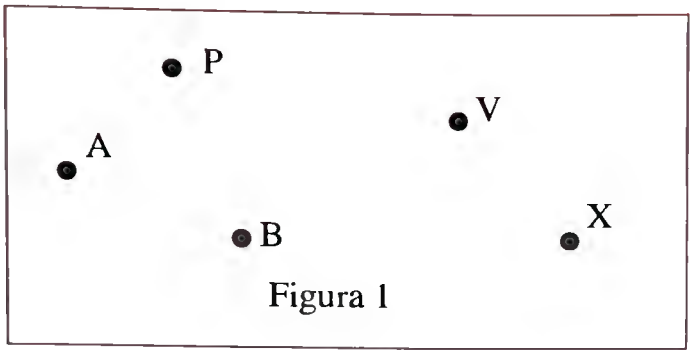


Figura 1

En la figura 2 hemos representado lineas *rectas* o rectas simplemente que denotamos con las letras minúsculas: r, s, m.

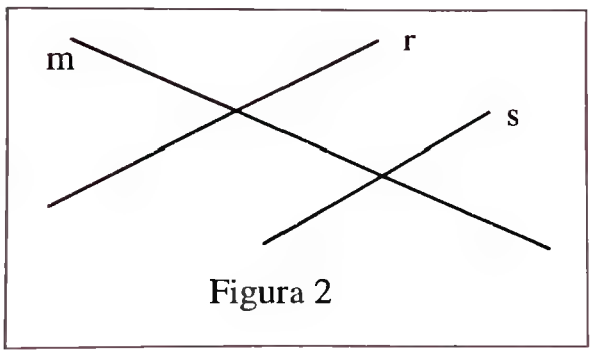


Figura 2

Existe una relación entre los puntos y las rectas del plano, es decir, un punto puede estar o no estar sobre una recta. Esta relación se suele designar con muchos términos diferentes: un punto pertenece a una recta, P $\in$ r, una recta pasa por un punto. En la figura 3 el punto A está sobre la recta r, la recta s pasa por el punto T, el punto A no está en la recta s, el punto X es exterior a la recta r.

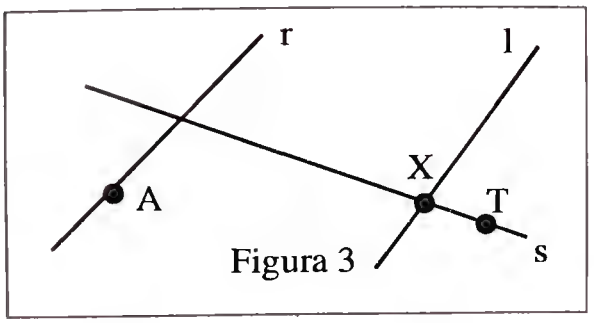


Figura 3

Si un punto pertenece a dos rectas distintas se dice que tales rectas se *cortan* en dicho punto. Las rectas l y s de la figura 3 se cortan en el punto X.

Algunas propiedades como la siguiente se denominan postulados o axiomas geométricos:

Dados dos puntos distintos P y Q del plano, existe una única recta que contiene a ambos (figura 4).

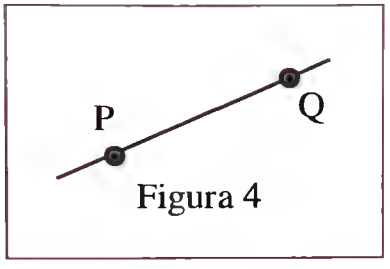


Figura 4

Dos rectas iguales o bien distintas pero sin ningún punto de corte se denominan *paralelas* (figura 5).

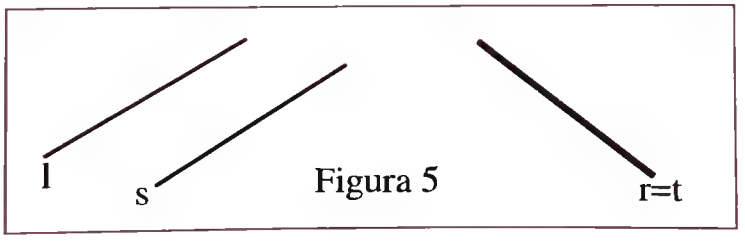


Figura 5

Una consecuencia directa del postulado anterior y de la definición de rectas paralelas es que dos rectas o bien son paralelas o bien se cortan en un punto.

El siguiente postulado es de gran importancia en geometría:

Sean r una recta y P un punto. Existe una única recta que pasa por P y es paralela a r (figura 6).

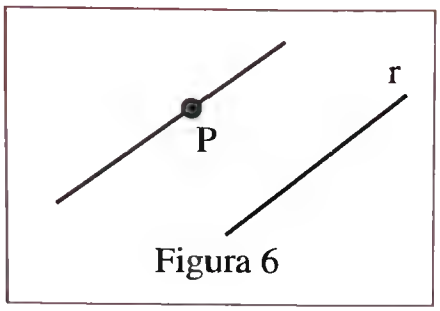


Figura 6

Notas Históricas

Ya los egipcios usaron la geometría para controlar las crecidas del río Nilo pero fueron los griegos quienes desarrollaron una verdadera teoría de la geometría. En primer lugar los conceptos de geometría estudiados por los griegos eran conceptos abstractos: los puntos, las rectas no vivían ya en un espacio físico sino que se trataba de modelos que podrían ser aplicados en muchas situaciones prácticas distintas o formar parte de una teoría filosófica. Así Platon dice "los objetos del conocimiento geométrico son eternos". En segundo lugar los griegos utilizaron razonamientos lógicos para obtener nuevas propiedades a partir de otras ya conocidas. La obra cumbre de la geometría griega es "Los elementos" de Euclides (300 antes de Cristo). En "Los elementos" se introduce el método axiomático en matemáticas, es decir se parte de ciertas propiedades incuestionables llamadas postulados o axiomas y a partir de ellos se demuestran los demás teoremas o resultados. "Los elementos" es según algunos autores el libro más leído después de la Biblia y sin duda alguna es un ejemplo de obra del razonamiento humano.

El segundo postulado que hemos introducido ha mantenido ocupados durante muchos años a gran número de matemáticos y es equivalente a uno de los postulados de Euclides. El estudio de dicho postulado ha dado origen a la creación por J. Bolyai y N. Lovachevski (siglo XIX) de la geometría hiperbólica que después ha desempeñado un papel central en el estudio de teorías cosmológicas.

10.2 Medida de longitudes de segmentos y ángulos

Dos puntos del plano P y Q del plano determinan un *segmento* que se designa por PQ (ver figura 1) o bien por una letra minúscula, por ejemplo: a. Los puntos P y Q se denominan *extremos del segmento*. Si se establece un orden entre los extremos de un segmento, es decir uno de los extremos se dice que es el origen y el otro el fin, se denomina *segmento dirigido*.

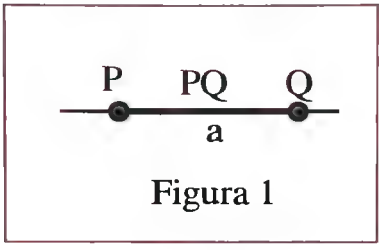


Figura 1

Sea r la recta que contiene a P y Q. Los puntos de la recta r pueden estar fuera del segmento PQ, como el punto A de la figura 2 o bien pueden ser puntos del segmento como el punto B de dicha figura.

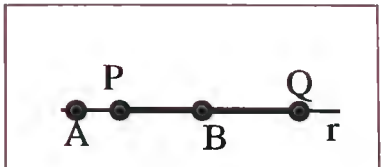


Figura 2

Así un punto de r se dice que es un punto del segmento PQ si se encuentra "entre" los extremos P y Q.

• Cualquier persona y en múltiples ocasiones ha tenido que medir longitudes: de muebles, de telas, de terrenos. Usando diversos instrumentos de medida y fraccionando si es necesario la unidad de medida es posible asignar un número a cada segmento. Tal número se denomina *medida* o *longitud* del segmento, Dado que nuestros segmentos serán dibujados en hojas de papel tomaremos como unidad el centímetro (centésima parte del metro). El instrumento de medida de

longitudes más adaptado a nuestro trabajo es la regla graduada cuyo uso está ilustrado en la figura 3.Dados dos puntos P y Q del plano, se llama *distancia* entre P y Q a la medida o longitud del segmento PQ.

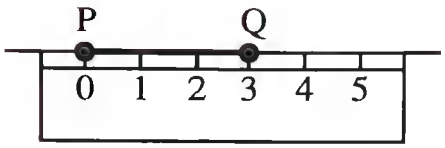


Figura 3

La definición matemática precisa de medida es poco natural sin hacer alusión a coordenadas. Cuando estudiemos geometría analítica introduciremos la fórmula para la distancia entre dos puntos, expresada en coordenadas, que ofrecerá una visión más matemática de la medida de longitudes.

La medida o longitud del segmento PQ o a se designará también por PQ o a; sin embargo son cosas diferentes: el segmento es un objeto geométrico y su longitud es un número.

- Un punto O sobre una recta r divide la recta en dos partes y cada una de dichas partes se denomina *semirrecta* (ver figura 4(a)). En la figura 4(b) hemos representado una única semirrecta, el punto P se denomina *extremo* de la semirrecta.

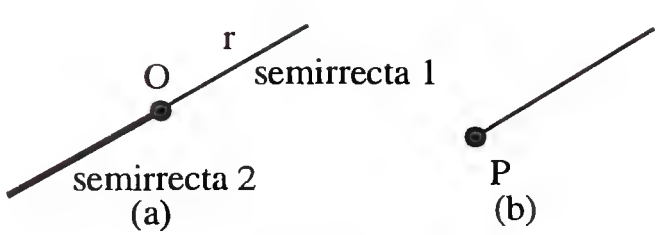
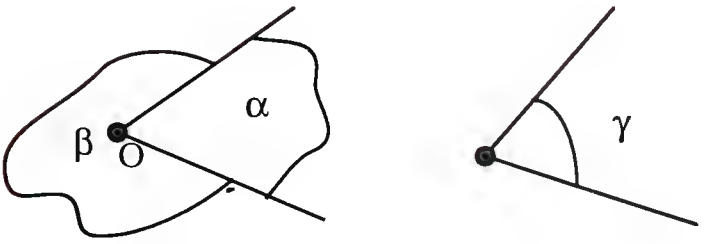


Figura 4

Dos semirrectas con el mismo extremo O determinan dos regiones del plano, cada una de dichas regiones se denomina *ángulo* (figura 5(a)). Los ángulos se designan usando letras griegas, así los ángulos de la figura 5(a) se designarán α y β.



(a) (b)

Figura 5

El extremo de las semirrectas que determinan un ángulo se denomina *vértice* del ángulo. En la figura 5(b) hemos representado un único ángulo.

Para medir ángulos dibujados sobre un papel se utiliza un instrumento llamado *transportador de ángulos* (figura 6). En la figura 6 se ilustra como medir ángulos usando el transportador.

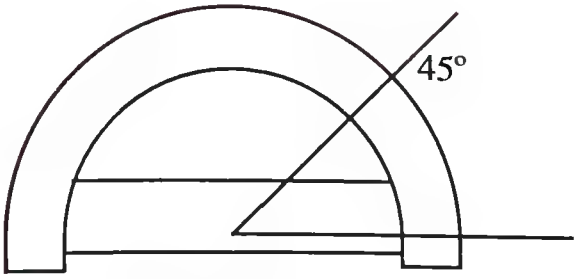


Figura 6

El sistema de medida de ángulos en grados se denomina sistema sexagesimal. En el sistema sexagesimal los grados de un ángulo vienen dados por números enteros. Para obtener aproximaciones de la medida

de cualquier ángulo cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos (algunas calculadoras sin embargo fraccionan los grados con decimales).

Al igual que para los segmentos se denotará con la misma letra al ángulo y a su medida aunque representen cosas distintas.

10.2.1 Ejemplo

El ángulo β de la figura mide 135°, o simplemente $\beta=135°$.

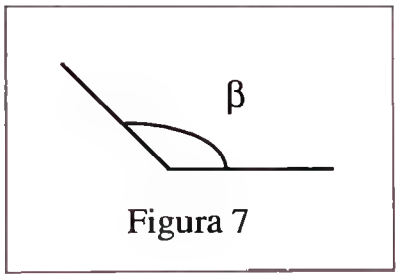


Figura 7

Hay ángulos cuya medida les hace especiales: el ángulo *recto* que mide 90° (figura 8(a)), el ángulo *llano*, de 180° (figura 8(b)), y el ángulo *completo* que mide 360° (figura 8(c)). Se dice que un ángulo es *agudo* si su medida es menor que 90° y *obtuso* si mide más de 90° (figura 8 (d) y (e)).

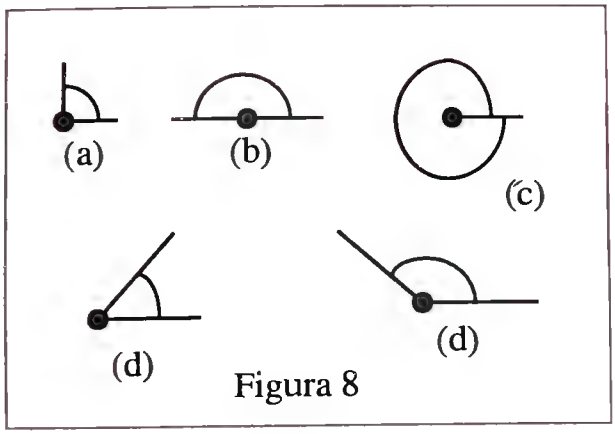


Figura 8

El sistema sexagesimal no es el sistema de medida de ángulos más usado en matemáticas. Definiremos ahora otro sistema de medida que es sin duda más importante. Previamente necesitamos algunos conceptos

geométricos. Una *circunferencia* es el conjunto de puntos del plano que distan de otro punto O, llamado *centro* de la circunferencia, una cantidad constante r llamada *radio* de la circunferencia. Dado un ángulo α consideramos una circunferencia de radio 1 y con centro el vértice del ángulo, entonces la medida del ángulo será la longitud del arco de circunferencia comprendido en dicho ángulo (ver figura 9). El problema está ahora en medir tal ángulo (en principio estaría en dar sentido a la medida de un arco) (ver figura 9). Sabiendo (por cultura general) que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ y como hemos tomado r=1 tendremos que la medida del ángulo completo es 2π. Las unidades de medida de este sistema se denominan radianes, es decir, el ángulo completo mide 2π radianes. Como cuatro ángulos rectos equivalen a un ángulo completo, un ángulo recto mide $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes y un ángulo llano mide π radianes. En general un ángulo de g grados mide $\frac{g}{360} \cdot 2\pi = g \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes y un ángulo que mida α radianes medirá en grados $\alpha \cdot \frac{180}{\pi}$. Un radián es entonces igual a $\frac{180}{\pi}$ grados.

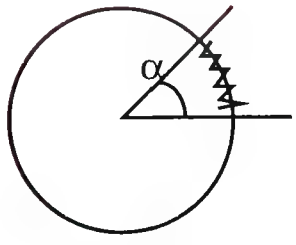


Figura 9

- Expresaremos las medidas de los ángulos indistintamente en grados y en radianes.

10.2.2 Ejemplos

a) Un ángulo de 45° mide $45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ radianes.

b) Un ángulo que mide $\frac{\pi}{3}$ radianes mide $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60°$.

• Para concluir esta sección enunciaremos algunas propiedades importantes que relacionan ángulos y posiciones de rectas.

Supongamos que tenemos tres rectas como muestra la figura 10, de modo que s y t son paralelas. Entonces: los ángulos α y α' son iguales. Reciprocamente, si $\alpha=\alpha'$ entonces las rectas s y t son paralelas.

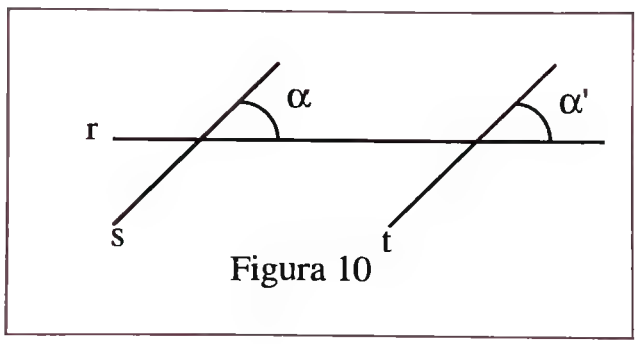


Figura 10

Dadas dos rectas r y s que se cortan en un punto P se dice que son *perpendiculares* si los ángulos determinados por r y s con vértice P son rectos (figura 11).

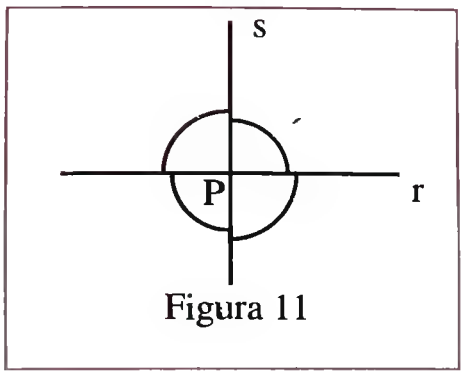


Figura 11

Dado un punto P en una recta r existe una única recta perpendicular a r que pase por P. Como consecuencia del postulado final de la sección anterior (10.1) y de la propiedad ilustrada en la figura 10 se tiene que dado un punto exterior a una recta existe una única perpendicular a la recta que pase por dicho punto (ver figura 12).

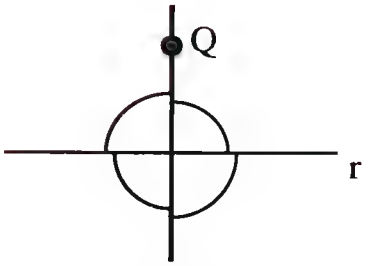


Figura 12

Notas Históricas

Según los historiadores fueron los caldeos quienes dividieron la circunferencia en trecientas sesenta partes, fundándose en el hecho de que la revolución del sol se verifica en unos trescientos sesenta días. Tal división fue transmitida por los griegos y se conserva hoy en día en los grados del sistema sexagesimal.

10.3 Triángulos, triángulos semejantes y teorema de Tales.

Como ya dijimos en la introducción, la geometría es la rama de las matemáticas que estudia las figuras del plano o del espacio. Los triángulos son las figuras más importantes de la geometría del plano pues muchos problemas relativos a figuras más complejas se pueden reducir, dividiendo la figura en cuestión en triángulos (triangulando), a problemas o mediciones en triángulos.

En primer lugar recordemos qué es un triángulo. Sean A, B y C tres puntos en el plano no alineados, es decir que no están contenidos en la misma linea recta los tres (figura 1). Se define *triángulo* como la figura formada por los tres segmentos AB, BC y CA (figura 1). Los segmentos

c=AB, a=BC y b=CA se denominan *lados* del triángulo y los puntos A, B y C *vértices* del triángulo. El triángulo se denotará por los nombres de los tres vértices: A, B, C. Los ángulos cuyos vértices son los vértices del triángulo y cuyas semirrectas contienen a los lados del triángulo se denominan *ángulos* del triángulo. Dado un lado, el ángulo del triángulo cuyo vértice no es ninguno de los extremos del lado se dice que es el *ángulo opuesto* al lado. Del mismo modo se define *lado opuesto* a un ángulo del triángulo. El ángulo α es el opuesto al lado a y el lado b es el opuesto al ángulo β.

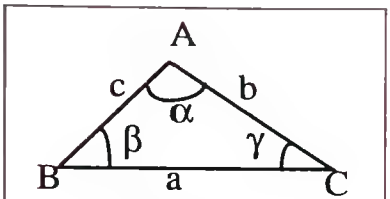


Figura 1

Intuitivamente dos *triángulos son iguales* si construidos de un material sólido rígido, por ejemplo de hierro, es posible desplazar y superponer uno encima del otro de manera que coincidan los tres vértices. Así el triángulo ABC no es igual al A'B'C' de la figura 2.

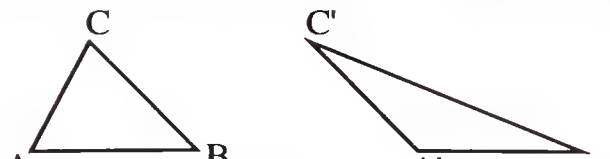


Figura 2

Si dos triángulos son iguales entonces las medidas de los lados y ángulos del triángulo también lo son.

Obsérvese en la figura 3 que el triángulo ABC es igual al triángulo A'B'C'. Sin embargo no se puede hacer coincidir A con A', B con B' y C con C' sin deformar, pero si B con A', C con B' y A con C'.

10.3 Triángulos, triángulos semejantes y teorema de Tales.

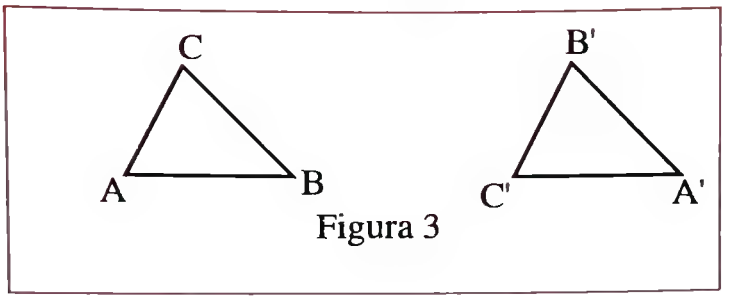


Figura 3

Si dos triángulos tienen por lados a, b, c y a', b', c' respectivamente y se verifica a = a', b = b' y c = c' entonces tales triángulos son iguales. Así el problema de igualdad de triángulos se puede reducir a un problema de igualdad de números por medio de la medida de lados.

Sin embargo dos triángulos con los mismos ángulos no tienen por qué ser iguales. La figura 4 nos muestra un ejemplo de tal situación.

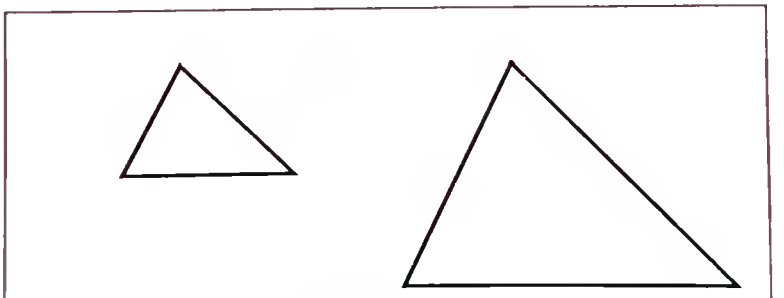


Figura 4

Se dice que dos triángulos cuyos ángulos son α, β, γ y α', β', γ' respectivamente son *semejantes* si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$.

Un teorema importante de geometría plana y que sin duda conocerá el lector asegura que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es π. Si los ángulos se miden en grados sexagesimales: la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En el ejercicio 2 se ofrece una justificación de este resultado.

10.3.1 Ejemplo

Un triángulo tiene un ángulo α que mide $\frac{\pi}{2}$ y el otro b que mide $\frac{\pi}{6}$. Entonces podemos concluir que el tercer ángulo del triángulo mide $\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$.

Para saber si dos triángulos son semejantes entonces basta con que dos ángulos sean iguales pues el tercero lo será automáticamente.

El siguiente resultado de geometría es uno de los más antiguos y nos relacionan las longitudes de los lados de dos triángulos semejantes.

10-3.2 Teorema de Tales.

Sean dos triángulos cuyos ángulos son α, β, γ y α', β', γ' respectivamente. Supongamos que los lados de tales triángulos son a, b, c y a', b', c' respectivamente, de modo que a es opuesto a α, b a β y c a γ, y a' es opuesto a α', b' a β' y c' a γ'. Si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$, es decir si los triángulos dados son semejantes, entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

10.3.3 Ejemplo

Supongamos que tenemos los triángulos ABC y AB'C' de la figura 5. Como las rectas que contienen a BC y B'C' son paralelas, por las observaciones finales de la sección anterior $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$, con lo cual ABC y AB'C' son semejantes.

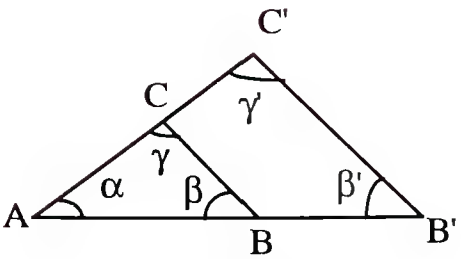


Figura 5

Sabiendo que AB = 2 cm, AC = 2 cm y AB' = 5 cm podemos aplicar el Teorema de Tales y deducir que:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{2}{5} = \frac{AC}{AC'} = \frac{2}{AC'},$$

luego AC' = 5 cm.

Ahora ofrecemos un ejemplo más práctico de aplicación del teorema de Tales:'

10.3.4 Ejemplo

Dado que el sol se encuentra suficientemente alejado de la tierra podemos considerar que los rayos solares son paralelos. Así si consideramos dos objetos y sus sombras, como en la figura 6, los ángulos α y β tienen la misma medida. Por tanto los triángulos PQR y P'Q'R' son semejantes. Si la sombra del edificio es 20 veces mayor que la sombra del individuo y la altura del individuo es 1'70 metros, podremos calcular usando el Teorema de Tales la altura del edificio:

$$\frac{\text{Altura}}{1'70} = \frac{QR}{Q'R'} = 20$$

Así: Altura del edificio = $20 \cdot 1'70 = 34$ metros.

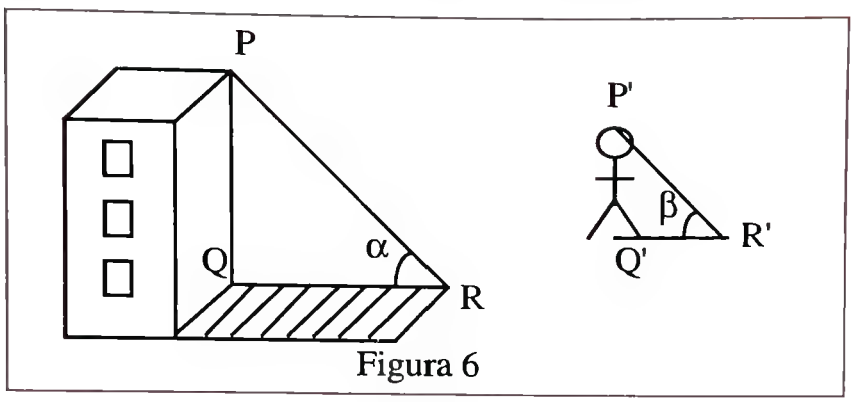


Figura 6

Notas Históricas

Tales de Mileto es el matemático griego más antiguo de nombre conocido. Se sabe que fue mercader y que por los años 580 a. de J.C. estuvo en Egipto entrando en contacto con los sacerdotes. Estos se quedaron impresionados cuando Tales calculó la altura de la Gran Pirámide comparando la longitud de su sombra con la sombra de una pértiga de altura conocida, de forma análoga a como se explica en el ejemplo anterior el cálculo de alturas por comparación de sombras.

10.4 El Teorema de Pitágoras

Es, sin duda alguna, el teorema más famoso entre aquéllos de la matemática elemental y su importancia tanto en matemáticas como en sus aplicaciones es capital.

Antes de enunciarlo hemos de definir un tipo especial de triángulos que son los triángulos para los que el teorema de Pitágoras tiene validez.

Un triángulo se dice que es *rectángulo* si uno de sus ángulos es recto (véase la figura 1). El lado opuesto al ángulo recto se denomina *hipotenusa* y los otros dos, *catetos*.

El teorema de Pitágoras asegura:

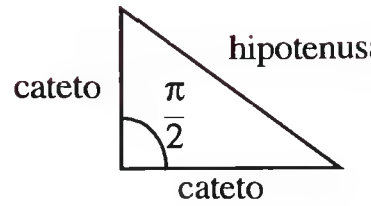


Figura 1

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Supongamos que un triángulo rectángulo tiene por hipotenusa el segmento a y por catetos b y c (ver figura 2), entonces el Teorema de Pitágoras se puede enunciar con la fórmula siguiente:

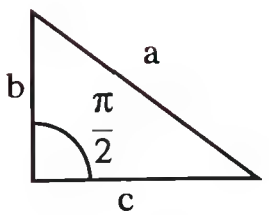


Figura 2

$$a^2 = b^2 + c^2$$

El Teorema de Pitágoras sirve para calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos, y para calcular la longitud de un cateto conocidos la hipotenusa y otro cateto. Así para el triángulo de la figura 2:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

En la sección anterior decíamos que si dos triángulos tenían las medidas de los lados iguales entonces tales triángulos eran iguales. En virtud del Teorema de Pitágoras tendremos que si dos triángulos rectángulos tienen dos catetos iguales (o la hipotenusa y un cateto iguales) entonces tales triángulos son iguales.

10.4.1 Ejemplo

Supongamos que en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm y un cateto mide 4 cm; entonces el otro cateto medirá:

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

- Obsérvese que existen triángulos que pueden tener uno o más lados que sean números irracionales, por ejemplo, la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cm, tiene longitud $\sqrt{2}$ cm. Si se trata de medir con regla graduada la hipotenusa de tal triángulo sólo se obtendrá una burda aproximación. Este es uno de los motivos de insatisfacción que desde el punto de vista matemático tiene la introducción de medida de longitudes que hemos utilizado en este tema.

Notas Históricas

Pitágoras vivió entre el 550 y el 500 antes de J.C. y fundó una hermandad de tipo religioso que tendía a la purificación de sus adeptos por medio de las matemáticas como ciencia y de la música como arte. Según Próculo (410-485 después de J.C.) Pitágoras sacrificó un buey en honor del descubrimiento del Teorema de esta sección. Sin embargo parece que el Teorema de Pitágoras ya era conocido por los babilonios (III milenio antes de J.C.) y quizás por geómetras hindús posteriores o coetáneos de los babilonios.

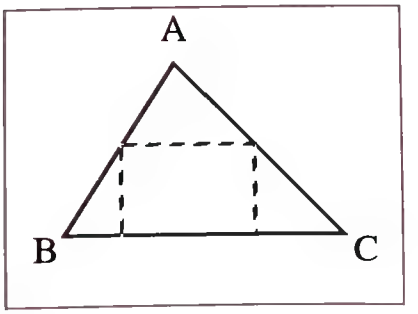
10.5 Ejercicios

1.- (a) Un ángulo α mide 5° ¿cuánto mide α en radianes?.

(b) Un ángulo β mide $\frac{\pi}{10}$ radianes ¿cuánto mide β en grados?.

2.- Construya un triángulo de papel ABC con la medida de los ángulos que desee. Pruebe que la suma de los ángulos de tal triángulo es π realizando los siguientes pliegues:

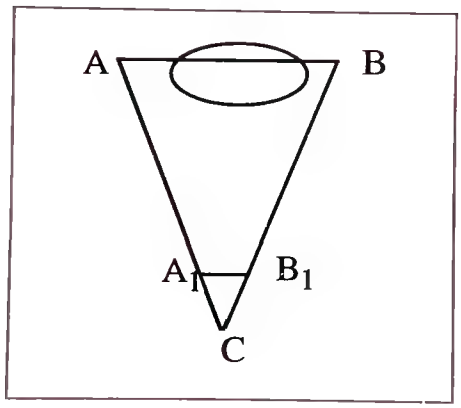
1. Pliegue por una recta paralela al lado BC de modo que el vértice A se situe sobre el lado BC.



2. Pliegue por rectas perpendiculares a BC de modo que los vértices B y C se situen donde se encuentra A después del primer pliegue.

3.- La sombra de un edificio mide 10 metros y la sombra de su primer piso 2 metros. Sabiendo que la altura del primer piso es 3 metros, calcúlese la altura de la torre.

4.- Para obtener la longitud del segmento AB de la figura (salvando un pequeño lago) se han efectuado las siguientes medidas: $CA_1 = 2$ metros, $A_1B_1 = 2'5$ metros y $CA = 110$ metros, con la precaución de que las rectas que contienen a AB y A_1B_1 sean paralelas. ¿Cual es la longitud de AB?.



5.- Un triángulo rectángulo tiene dos catetos con la misma longitud y la hipotenusa mide 2 metros. ¿Cuánto miden los catetos?.

TEMA 11

Trigonometría

Trigonometría etimológicamente quiere decir medida de triángulos. Vamos a estudiar cómo obtener las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

11.1 Razones trigonométricas de ángulos agudos.

En el tema anterior se comenzó el estudio de los triángulos rectángulos. En particular se obtuvo que para determinar la igualdad de los triángulos rectángulos basta comparar la longitud de dos de sus lados. Obsérvese que si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo con la misma medida, dado que la suma de los ángulos de un triángulo es π, dichos triángulos son semejantes y podremos usar el Teorema de Tales (sección 10.3). Así, sean ABC y A'B'C' dos triángulos rectángulos cuyos lados y ángulos son a, b, c, α, β, γ y a', b', c', α', β', γ' respectivamente (figura 1).

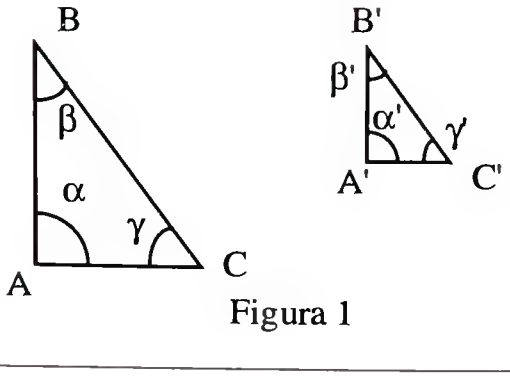


Figura 1

Supongamos que $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$ y que $\beta = \beta'$, entonces $\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta' = \gamma'$. Por el Teorema de Tales $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Por tanto si $a = a'$ o bien $b = b'$ o bien $c = c'$ se tendrá que $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$ con lo que los triángulos serán iguales. Es decir, es suficiente comprobar que dos triángulos rectángulos tienen un lado y un ángulo agudo iguales (que sean correspondientes, por ejemplo un ángulo y el cateto opuesto en ambos triángulos) para concluir que tales triángulos son iguales.

11.1.1 Ejemplo

Supongamos que en el triángulo ABC el cateto c mide 40 metros y el ángulo β mide $\frac{\pi}{3}$ y deseamos conocer la medida de la hipotenusa. Para no tener que construir un triángulo con un lado de 40 metros podemos utilizar el teorema de Tales y construir un triángulo semejante a ABC más manejable, por ejemplo A'B'C'. Sabiendo que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ tendremos que $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ y como en A'B'C' podemos medir con facilidad, supongamos que hemos determinado la razón $\frac{c'}{a'} = \frac{1}{2}$, con lo cual

$$a = \frac{40}{\frac{1}{2}} = 80 \text{ metros.}$$

Así pues, en virtud del Teorema de Tales, las razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo sólo dependen de uno de los ángulos agudos del triángulo, por lo que tales razones se denominarán *razones trigonométricas* del ángulo. A continuación daremos la definición precisa de las razones trigonométricas:

Sea ABC el triángulo rectángulo de la figura 2, a,b,c sus lados y α,β,γ sus ángulos.

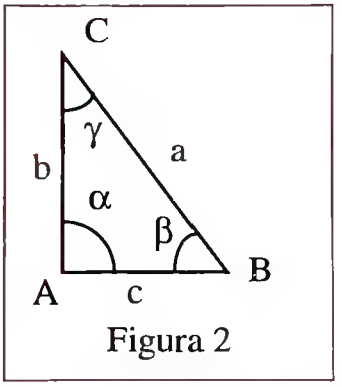


Figura 2

Se denomina *seno* del ángulo γ y se denota por sen γ al número resultante de la división de la longitud del cateto c, cateto opuesto al ángulo, por la longitud de la hipotenusa a, es decir

$$\text{sen } \gamma = \frac{c}{a}.$$

Se denomina *coseno* del ángulo γ y se denota por cos γ al número resultante de la división de la longitud del cateto b, cateto que no es opuesto al ángulo, por la longitud de la hipotenusa a, es decir

$$\cos \gamma = \frac{b}{a}.$$

Se denomina *tangente* del ángulo γ y se denota por tg γ al número resultante de la división de la longitud del cateto c (opuesto al ángulo) por la longitud del cateto b (no opuesto), es decir

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{c}{b}.$$

Se denomina *cotangente* del ángulo γ y se denota por cotg γ al número inverso de la tangente de γ, es decir

$$\text{cotg}\,\gamma = \frac{b}{c} = \frac{1}{\text{tg}\,\gamma}.$$

Las dos razones trigonométricas, secante y cosecante, que definiremos a continuación se utilizan con menos frecuencia que las anteriores:

Se denomina *secante* del ángulo γ y se denota por sec γ al número inverso del coseno de γ, es decir

$$\sec\gamma = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Se denomina *cosecante* del ángulo γ y se denota por cosec γ al número inverso del seno de γ, es decir

$$\text{cosec}\,\gamma = \frac{a}{c} = \frac{1}{\text{sen}\,\gamma}.$$

- Obsérvese que en un triángulo rectángulo los ángulos que no son rectos deben ser menores que $\frac{\pi}{2}$, es decir, son agudos. Así pues hemos definido las razones trigonométricas de ángulos agudos. En el tema siguiente se definirán las razones de ángulos cualesquiera.

11.1.2 Ejemplo

Para el ángulo β de la figura 2 las razones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}, \cos\beta = \frac{c}{a}, \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}, \operatorname{cotg}\beta = \frac{c}{b}.$$

Toda calculadora científica o técnica posee ciertas funciones que permiten obtener automáticamente las razones trigonométricas de ángulos expresados en grados o en radianes. Aunque en ocasiones depende del modelo de calculadora, normalmente las teclas que calculan las razones trigonométricas son sin, cos y tan.

Así utilizando una calculadora se pueden obtener las medidas de los lados de un triángulo rectángulo si se conocen la medida de un ángulo y un lado.

11.1.3 Ejemplo

Se sabe que el triángulo rectángulo ABC de la figura 2 tiene hipotenusa a = 7 cm y ángulo $\beta = 35°$. Para calcular b y c bastará saber que $\operatorname{sen} 35° = \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}$, luego $b = 7.\operatorname{sen} 35°$. Usando la calculadora obtenemos que sen 35° es aproximadamente 0'5735, luego b será aproximadamente 4 centímetros. Para calcular c se puede aplicar el Teorema de Pitágoras o bien la fórmula del coseno de β: $\cos\beta = \frac{c}{a}$, luego $c = 7.\cos 35°$ que nos da aproximadamente una longitud de 5'7 cm.

11.2 Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Sea ABC el triángulo de la figura 2 de la sección anterior. Por el Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$. Dividiendo por a^2 tenemos $1 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2$ y como $\cos\gamma = \frac{b}{a}$, $\operatorname{sen}\gamma = \frac{c}{a}$, se verifica:

$$\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$$

Con esta fórmula podemos averiguar el coseno de un ángulo agudo conociendo su seno y viceversa.

11.2.1 Ejemplo

El seno de un ángulo β es 0,7; entonces su coseno verifica $1 = (0,7)^2 + \cos^2\beta$, por tanto $\cos\beta = \sqrt{1 - (0'7)^2} = \sqrt{0'51}$.

Una consecuencia importante de la fórmula $\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$ es que el seno y el coseno de un ángulo *nunca pueden ser números mayores que uno.*

Por otra parte de la definición de tangente tenemos:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}, \text{ es decir:}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}$$

y del mismo modo:

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Con las fórmulas anteriores se pueden calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas.

11.2.2 Ejemplo

Para el ángulo β del ejemplo anterior sabemos que su coseno es $\sqrt{0'51}$ y su seno es 0,7 por tanto $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{0'7}{\sqrt{0'51}}$ y $\operatorname{cotg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\sqrt{0'51}}{0'7}$.

11.2.3 Ejemplo

Supongamos que la tangente de un ángulo γ es 0,5, entonces:

$$\operatorname{tg}\gamma = 0'5 = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma},$$

por la fórmula $\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$ se tiene:

$$0'5 = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\gamma}},$$

de donde elevando al cuadrado:

$$0'25 = \frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{1-\operatorname{sen}^2\gamma},$$

luego:

$$0'25 - 0'25\operatorname{sen}^2\gamma = \operatorname{sen}^2\gamma,$$

$$\operatorname{sen}^2\gamma = \frac{0'25}{1'25} = \frac{1}{5},$$

y como el seno de un ángulo agudo es un número positivo:

$$\text{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Para calcular el coseno tenemos:

$$\text{tg}\gamma = \frac{1}{2} = \frac{\text{sen}\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\cos\gamma},$$

con lo cual:

$$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Finalmente:

$$\text{cotg}\gamma = \frac{1}{\text{tg}\gamma} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

11.3 Algunos cálculos sencillos de razones trigonométricas.

Dos ángulos se dicen *complementarios* si su suma es $\frac{\pi}{2}$.

En el triángulo ABC de la figura 2 de la sección 11.1 los ángulos β y γ son complementarios. Por tanto de la definición de dada en la sección 11.1 de las razones trigonométricas tenemos (ver ejemplo 11.1.2 de la sección 11.1):

$$\cos\gamma = \frac{b}{a} = \text{sen}\beta = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{c}{a} = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{c}{b} = \text{cotg}\beta = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

Resumiendo:

$$\operatorname{sen}\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$
$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$
$$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

11.3.1 Ejemplo

Calcularemos las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{4}$. Como $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, por las fórmulas anteriores tenemos $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, por tanto $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$.

Por otro lado tenemos $1 = \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$ y como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

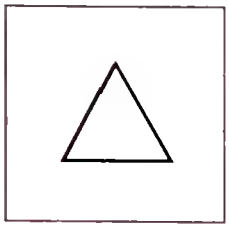
de donde:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ y}$$

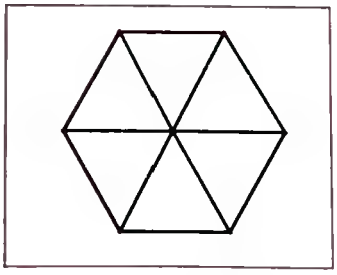
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11.3.2 Ejemplo

Un triángulo es *equilátero* si las longitudes de sus tres lados son iguales:



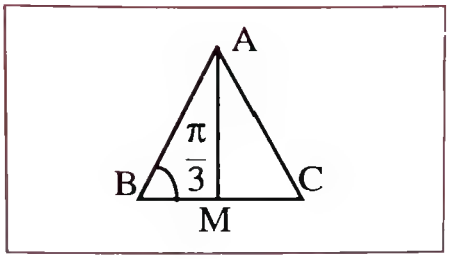
Uniendo seis triángulos equiláteros por un vértice se obtiene la siguiente figura (hexágono regular):



Como la construcción de la figura se puede repetir con cada vértice de un triángulo equilátero, se concluye que cada ángulo de un triángulo equilátero mide $2\pi\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Podemos ahora calcular las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{3}$ dividiendo en dos mitades iguales un triángulo equilátero ABC:

11.3 Algunos cálculos sencillos de razones trigonométricas.



Como $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$, tenemos $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$. Usando la primera fórmula de la sección 11.2 tenemos:

$$1 = \frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3},$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por último:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Usando las fórmulas de esta sección para ángulos complementarios podemos calcular las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

11.4 De las razones trigonométricas al ángulo.

Dado un número comprendido entre cero y uno existe un ángulo agudo cuyo seno es tal número. Es decir, si $x \in (0,1)$ existe $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que sen $\alpha = x$; al ángulo α se le denota arcsen x (se lee "arco seno de x").

Del mismo modo si $x \in (0,1)$ existe $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que cos $\alpha = x$; y al ángulo α se le denota arccos x. Para $x \in (0,\infty)$ se define arctgx = α como el ángulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que tgα = x y de forma totalmente análoga se define arccotg x.

Las máquinas calculadoras científicas o técnicas suelen poseer también funciones para calcular arcsen x, arccos x, arctg x y arccotg x.

Mediante arcsen x, arcos x, arctg x y arccotg x se pueden calcular los ángulos de un triángulo rectángulo donde se conocen las longitudes de los lados.

11.4.1 Ejemplo

En un triángulo rectángulo ABC sabemos que los catetos b y c miden respectivamente 7 y 2 centímetros, y se calcularán las medidas de β y γ en radianes. Para ello basta saber que $\text{tg}\beta = \frac{b}{c} = \frac{7}{2}$ y por tanto $\beta = \text{arctg}\frac{7}{2}$ que usando calculadora nos da aproximadamente $\beta = 1'29$ y $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \approx 0'28$.

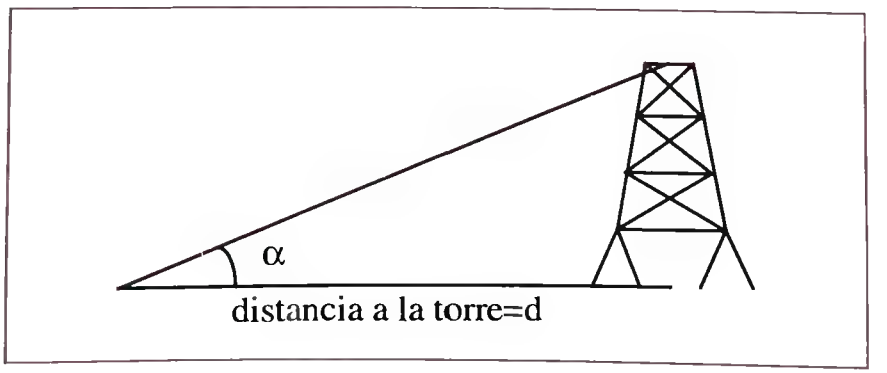
11.5 Algunas aplicaciones de la trigonometría

En agrimensura, geodesia y topografía se realizan mediciones de terrenos. Normalemente es más sencillo medir ángulos que distancias y se cometen menos errores dado que los aparatos de medición de ángulos (teodolitos) poseen gran precisión hoy en día. Así se tiende a utilizar una única medida de longitud (en ocasiones una pértiga que forma parte del equipo del teodolito) y con ayuda de mediciones de ángulos y trigonometría se consiguen las medidas deseadas.

En navegación también se utiliza trigonometría para determinar la posición de un barco conociendo los ángulos que forman las visuales a los faros en las costas.

11.5.1 Ejemplo

Se sabe que la altura de una torre de tendido eléctrico es de 30 metros y con ayuda de un teodolito hemos medido el ángulo α que forma la visual al vértice superior de la torre con el suelo, resultando que $\alpha = 0'29$ radianes (véase la figura). Deseamos calcular la distancia a la torre.



Tenemos $\text{tg}\,(0'29) = \dfrac{30}{d}$; luego $= \dfrac{30}{\text{tg}\,(0'29)} \approx 100$ metros.

11.6 Fórmulas para el seno y el coseno de la suma y diferencia de ángulos.

Las siguientes fórmulas son importantes y se usarán en temas posteriores:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

11.6.1 Ejemplo

Supongamos que necesitamos calcular $\cos\frac{\pi}{12}$. Aplicando una de las fórmulas anteriores tenemos:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$$

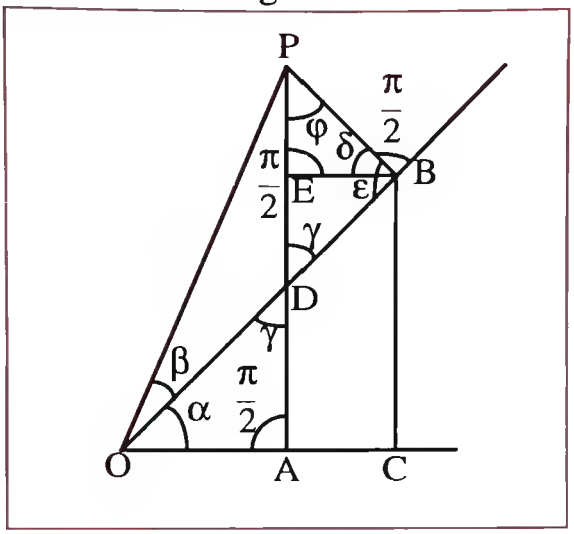
En la sección 11.3 se calcularon las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$, con lo que:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).$$

Daremos ahora una justificación geométrica de una de las fórmulas de esta sección.

11.6 Fórmulas para el seno y el coseno de la suma y diferencia de ángulos.

Sean α y β como muestra la figura.



Estableceremos la relación entre $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{OA}{OP}$ y las razones trigonométricas de α y β. Para simplificar supondremos que OP mide 1, así $\cos(\alpha+\beta) = OA$. Por otra parte $OA = OC - AC$.

Las rectas que contienen a PA y BC son paralelas de donde $AC = EB$. Por tanto:

$$\cos(\alpha+\beta) = OC - EB, \qquad (2)$$

El ángulo ε es recto, con lo cual:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{PB}{OP} = PB.$$

Por otra parte el ángulo $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ y como $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ se tiene que $\alpha = \varphi$. Así

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\varphi = \frac{EB}{PB}.$$

Luego $EB = PB \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$. (3)

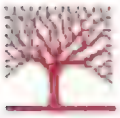
Por otra parte:

$$OB = \cos\beta \text{ y}$$

$$OC = OB\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) obtendremos la fórmula:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$



Notas Históricas

Según los arqueólogos ya en Babilonia se realizaron los primeros desarrollos sobre trigonometría. Así se ha encontrado una tablilla de escritura cuneiforme (datada entre 1900 y 1600 antes de J. C.) conteniendo algunas razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 45° y 59°. Más tarde los griegos usaron la trigonometría para resolver muchos problemas como diseño de calendarios, predicción del movimiento de los astros, navegación y por supuesto en geometría. Hiparco de Rodas (180-125 antes de J.C.) se considera el fundador de la trigonometría. La razón trigonométrica que definió es la cuerda de un ángulo, crd α, que está relacionada con la razón seno por la fórmula:

$$\operatorname{crd}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

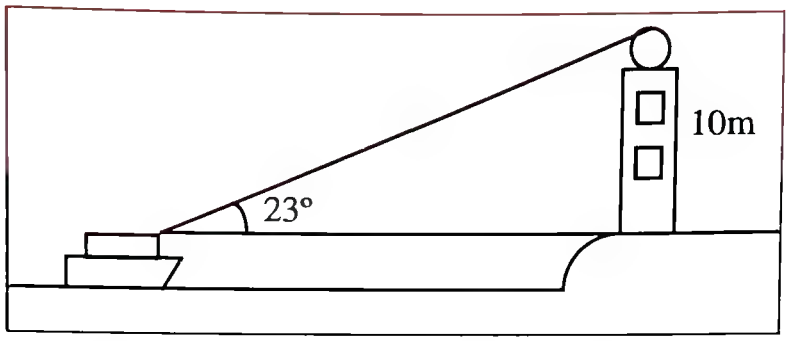
La fórmula anterior explica el origen del término *seno*. El término original era en sánscrito "ardhajya" y precisamente significaba "media cuerda". Los matemáticos árabes lo acortaron en "jyb" cuyo significado en árabe es golfo. La traducción latina de golfo es "sinus" que originó seno.

11.7 Ejercicios

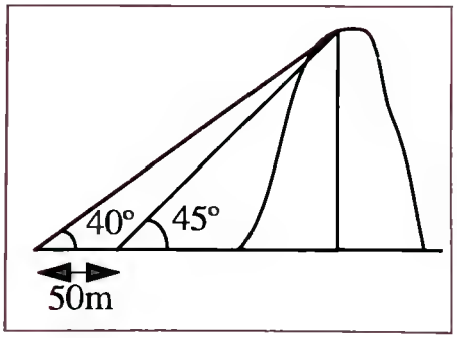
1.- En un triángulo rectángulo un ángulo β mide 15° y el cateto opuesto mide 3 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?.

2.- Sea α un ángulo tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Hállense sen α, tgα y cotgα (sin usar calculadora). Usando calculadora obtenga aproximadamente el valor de α en radianes.

3.- Halle la distancia del barco al faro de la figura conociendo la altura del faro y la medida del ángulo de tal figura.



4.- Calcúlese la altura de la montaña de la figura con los datos que aparecen.



5.- Calcúlense (sin usar calculadora) las razones trigonométricas de $\frac{5\pi}{12}$.

TEMA 12

Introducción a la geometría analítica

En los temas anteriores hemos estudiado algunos objetos geométricos y hemos encontrado ciertas propiedades y relaciones entre ellos. La geometría analítica como veremos reduce el estudio de puntos, rectas, curvas y figuras geométricas al de números, ecuaciones o expresiones numéricas, lo que hace posible la utilización del álgebra en la geometría. El descubrimiento del método de la geometría analítica cambia la faz de las matemáticas, es el germen de progresos vitales ulteriores (como el análisis matemático) y no es otra cosa que el resultado de una aproximación entre dos ciencias (geometría y álgebra) concebidas hasta entonces de manera aislada.

12.1 Coordenadas.

Consideremos un par de rectas perpendiculares como muestra la figura 1. Tal par de rectas se dirá que son unos *ejes de coordenadas*. Al punto de intersección de los dos ejes, O, se le llamará *origen de coordenadas*, al eje horizontal, *eje de abcisas* o eje Ox y al eje vertical *eje de ordenadas* o eje Oy.

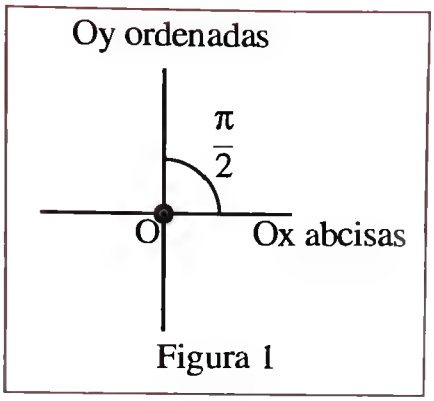


Figura 1

Dado un punto P en el plano, sabemos por el tema 10 que existe una única recta r_1 perpendicular al eje de abcisas que pasa por P (ver figura 2) y una única recta r_2 perpendicular al eje de ordenadas que pasa por P (figura 2). Llamaremos P_1 al punto de intersección de r_1 con Ox y P_2 al punto de intersección de r_2 con Oy. Midamos ahora, con una unidad de medida, el segmento OP_1. Si P_1 está a la derecha de O llamaremos a tal medida *abcisa* del punto P, si P_1 está a la izquierda de O la medida de OP_1 con signo menos es la abcisa de P, y si P_1 está sobre Oy P tiene por abcisa 0, la abcisa de P se designará por x. A continuación medimos el segmento OP_2. Si P_2 está por encima de O llamaremos a tal medida *ordenada* de P, si P_2 está por debajo de O la medida de OP_2 con signo menos es la ordenada de P y si P_2 pertenece a Ox, P tiene por ordenada 0, la ordenada de P se designará por y. El par $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se denomina *coordenadas* del punto P. De este modo se construye una aplicación del conjunto de puntos del plano en $\mathbf{R}^2$. Para ver que es una aplicación biyectiva basta construir la aplicación inversa. Así dado $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ hay que construir un punto P con coordenadas (x, y). En primer lugar se construye P_1 de modo que OP_1 tenga longitud $|x|$ y P_1 se halle a la derecha de O si x tiene signo positivo y a su izquierda si tiene signo negativo. Del mismo modo se construye P_2 de modo que OP_2 tenga longitud $|y|$ y P_2 esté situado más arriba de O si la ordenada es positiva y debajo si es negativa. Finalmente se trazan dos perpendiculares a los ejes coordenados que pasen por P_1 y P_2. El punto de intersección de tales perpendiculares es P pues tiene por coordenadas (x, y).

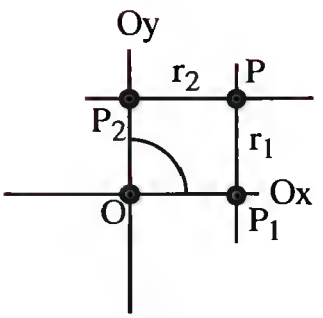


Figura 2

• Es muy importante observar cómo las coordenadas nos permiten pasar de objetos puramente geométricos a conjuntos numéricos de $\mathbf{R}^2$, donde la potencia de los métodos algebraicos nos facilitará mucho nuestro estudio.

12.1.1 Ejemplos

(a) ¿Qué coordenadas poseen los puntos Q, R y T de la figura 3?

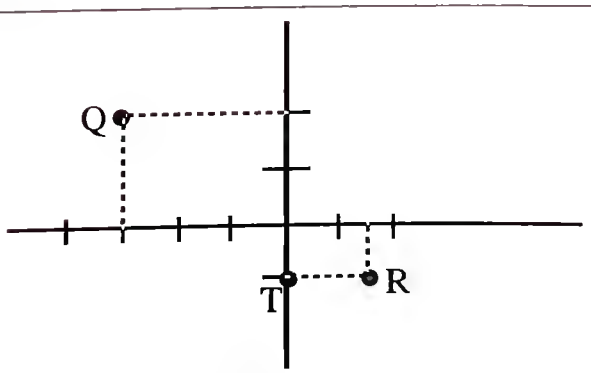
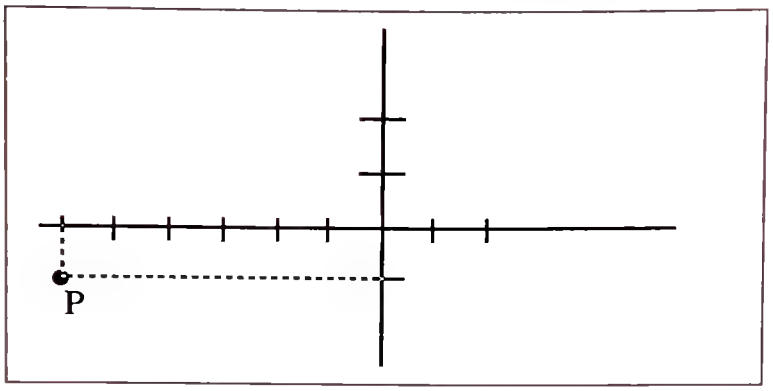


Figura 3

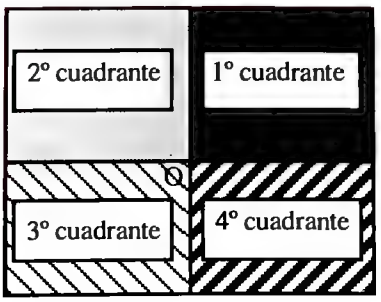
Las coordenadas de Q son (-3, 2), las de R son $(\frac{3}{2}, -1)$ y las de T (0, -1).

(b) Constrúyase el punto P de coordenadas (-6, -1):



• A continuación introduciremos una terminología que es útil para designar ciertas situaciones especiales de puntos en el plano:

Se dice que un punto está en el primer cuadrante si tiene coordenadas positivas. Si tal punto tiene abcisa negativa y ordenada positiva entoces se dice que está en el segundo cuadrante. Decimos que está en el tercer cuadrante si la abcisa y la ordenada son negativas y en el cuarto si la abcisa es positiva y la ordenada es negativa. En la siguiente figura están marcados con distintos entramados las regiones del plano dadas por cada uno de los cuadrantes.



De forma más esquemática:

$(x, y) \in 1^{\circ}$ cuadrante: $x \geq 0, y \geq 0$.

$(x, y) \in 2^{\circ}$ cuadrante: $x \leq 0, y \geq 0$.

$(x, y) \in 3^{\circ}$ cuadrante: $x \leq 0, y \leq 0$.

$(x, y) \in 4^{\circ}$ cuadrante: $x \geq 0, y \leq 0$.

Notas Históricas

Las coordenadas cartesianas toman su nombre de Descartes (Cartesius), el filósofo de la duda metódica, que se considera el descubridor de las coordenadas e iniciador de la geometría analítica. El desarrollo del álgebra durante los siglos XVI y XVII inspiró a Descartes la idea de combinarla con la Geometría. El verdadero mérito de Descartes no consiste en el uso de las coordenadas - que ya fueron utilizadas por el geómetra griego Apolonio - sino en adivinar que su empleo sistemático daría a la Geometría un método de gran potencia y gran universalidad pues no era necesario descubrir un método especial para cada figura. El método cartesiano resolvía los problemas sin más que someter a su acción la figura, obtener ecuaciones de ella y efectuar ciertas operaciones algebraicas, lo que trajo como consecuencia el progreso de la geometría y también del álgebra, pues se captó el significado geométrico de ciertas operaciones y dio lugar a nuevos desarrollos.

12.2 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

La primera aplicación de las coordenadas cartesianas será para nosotros la justificación de la definición de las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

Consideremos unos ejes coordenados y una circunferencia C con centro el origen de coordenadas y radio la unidad. Sea P un punto de la circunferencia C con coordenadas positivas (es decir en el primer

cuadrante) y sea P_0 el punto de la circunferencia con coordenadas (1, 0) (véase la figura 1). Sea α el ángulo de la figura 1. Entonces usando el triángulo OP_1P y el OPP_2 tenemos:

$$OP_1 = OP\cos\alpha,$$

$$OP_2 = OP\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OP\operatorname{sen}\alpha.$$

Como OP tiene longitud 1, entonces

$$OP_1 = \cos\alpha \quad \text{y} \quad OP_2 = \operatorname{sen}\alpha \ .$$

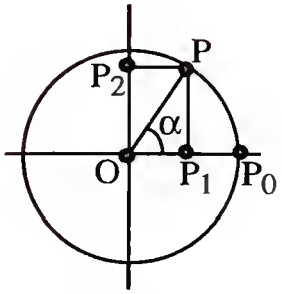


Figura 1

Es decir, la abcisa de P es el coseno de α y la ordenada de P es el seno de α.

Es útil como se verá en temas posteriores definir las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

Sea P un punto culaquiera de la circunferencia C con coordenadas (x, y) y sea α el ángulo P_0OP, (ver figura 2), entonces definimos:

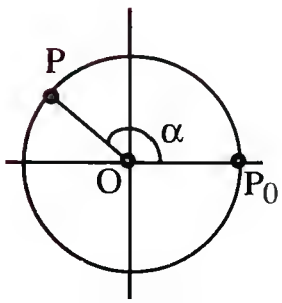


Figura 2

- seno de α es la ordenada de P:

$$\operatorname{sen}\alpha = y.$$

- coseno de α es la abcisa de P:

$$\cos\alpha = x.$$

Finalmente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{x}{y}.$$

- Como casos particulares de la definición tenemos:

- para $\frac{\pi}{2}$, en este caso P es (0,1):

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ no está definido pues no se puede dividir por cero,

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0.$$

- para π, ahora P es (-1,0):

$\operatorname{sen}\pi = 0, \cos\pi = -1, \operatorname{tg}\pi = 0$, $\operatorname{cotg}\pi$ no está definido.

- para $\frac{3\pi}{2}$, P es (0,-1):

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ no está definido, $\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{2} = 0$.

A partir de la propia definición de las razones trigonométricas obtenemos las siguientes fórmulas (ver figura 3):

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

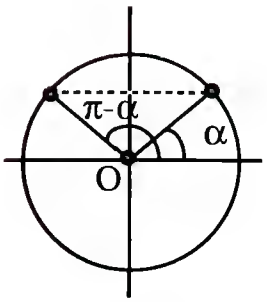


Figura 3

de la figura 4:

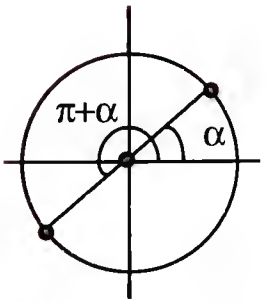


Figura 4

$$\text{sen}(\pi+\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\ \alpha$$
$$\text{tg}(\pi+\alpha) = \text{tg}\ \alpha$$
$$\text{cotg}(\pi+\alpha) = \text{cotg}\ \alpha$$

y de la figura 5:

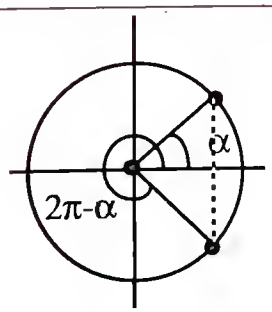


Figura 5

$$\text{sen}(2\pi-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\ \alpha$$
$$\text{tg}(2\pi-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$$
$$\text{cotg}(2\pi-\alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$$

Utilizando las fórmulas anteriores se puede reducir el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera al cálculo de las razones de un ángulo agudo.

12.2.1 Ejemplo

Hallaremos las razones trigonométricas de ángulos que miden $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$.

Para calcular las razones trigonométricas de $\frac{3\pi}{4}$ utilizaremos las fórmulas que relacionan las de α con $\pi-\alpha$ pues $\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}=-1.$$

Para calcular las razones trigonométricas de $\frac{5\pi}{4}$ utilizaremos las fórmulas que relacionan las de α con $\pi+\alpha$ pues $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{4}=1.$$

Por último para calcular las razones trigonométricas de $\frac{7\pi}{4}$ utilizaremos las fórmulas que relacionan las de α con $2\pi-\alpha$ pues $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{7\pi}{2} = -1.$$

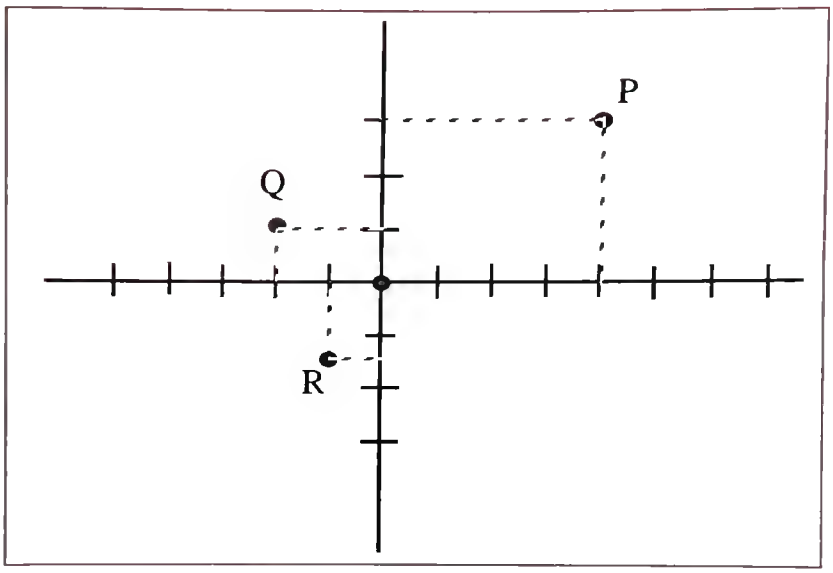
Todas las fórmulas establecidas en el tema anterior para ángulos agudos son válidas también para ángulos cualesquiera y las tres últimas fórmulas de esta sección se pueden deducir también de las de la sección 11.6.

- De la identidad $1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, se deduce que el seno y el coseno de un ángulo cualquiera están comprendidos entre 1 y -1.

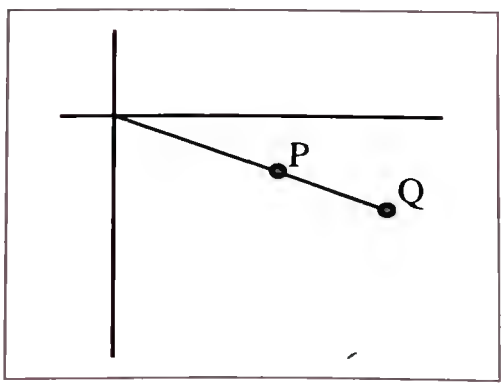
12.3 Ejercicios.

1.- Utilizando unos ejes coordenados en una hoja de papel dibuje los puntos de coordenadas: A (3, 1), B (-5, 2), C (-2, -1), D (0, 0),E (2, -1), F $(7, \frac{1}{2})$.

2.-Halle las coordenadas de los puntos P, Q y R de la figura siguiente.



3.- El punto P de la figura siguiente tiene coordenadas (3, -1) y el punto Q tiene abcisa 5, ¿cuál es la ordenada de Q?



4.- Hállense las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = \frac{7}{12}\pi$.

5.- Obtenga las razones trigonométricas del ángulo $\alpha+\frac{\pi}{2}$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

TEMA 13

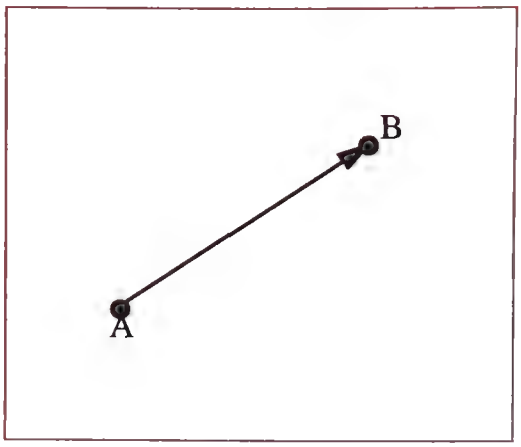
Vectores del plano

Consideremos dos magnitudes físicas como la temperatura y la velocidad instantánea de un cuerpo. La primera podemos medirla dando simplemente un número en una escala conveniente, y así decimos que una temperatura es de -13° Centígrados o de 75° Farenheit. Sin embargo para describir una velocidad necesitamos no sólo una cantidad, 124 Km/h, sino también debemos indicar la dirección y el sentido del cuerpo en movimiento.

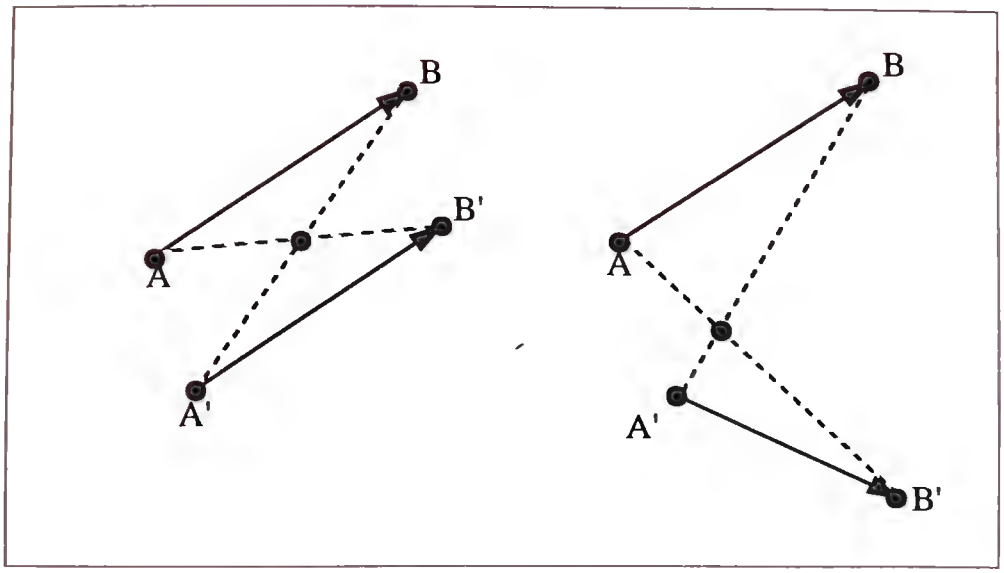
Las magnitudes del primer tipo se llaman *escalares* y las del segundo *vectoriales*. En este tema se introducen los *vectores* del plano, que son un sencillo caso particular de vectores, y en el tema 15 se estudiarán los vectores del espacio tridimensional. Se verá también cómo se precisan matemáticamente las nociones de dirección y sentido que aparecieron en el ejemplo anterior.

13.1 Definiciones

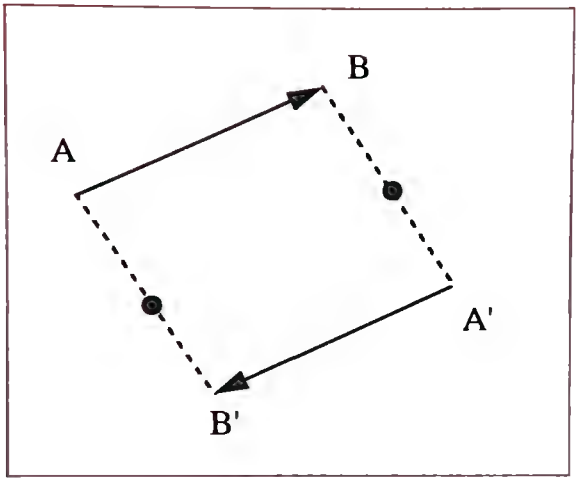
Sean A y B dos puntos diferentes del plano. Llamaremos *vector fijo* AB al segmento de origen A y extremo B. Según esta definición, el vector fijo AB es distinto al vector fijo BA. Observemos que los dos segmentos tienen la misma longitud pero sus sentidos son opuestos. El vector fijo AB se representa gráficamente mediante una flecha de A a B.



Sean A' y B' otros dos puntos del plano distintos a los anteriores y consideremos el vector fijo A'B'. Diremos que los vectores fijos AB y A'B' son *equivalentes* si los puntos medios de los segmentos AB' y A'B coinciden, como muestra la siguiente figura:



En el primer caso AB y A'B' son equivalentes y en el segundo no. De la figura anterior deducimos que es necesario que ambos vectores fijos sean paralelos y de igual longitud. Pero esto no basta como muestra la siguiente figura:



Aunque esta definición de equivalencia funciona bien para los vectores del plano, vamos a utilizar otra en términos de las coordenadas de los puntos A, B, A' y B', que tiene la ventaja de que puede generalizarse a otros tipos de vectores.

Sean A, B, A' y B' cuatro puntos del plano de coordenadas (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a'_1, a'_2) y (b'_1, b'_2), respectivamente.

Diremos que el vector fijo AB es equivalente al vector fijo A'B' si y sólo si $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (b'_1 - a'_1, b'_2 - a'_2)$.

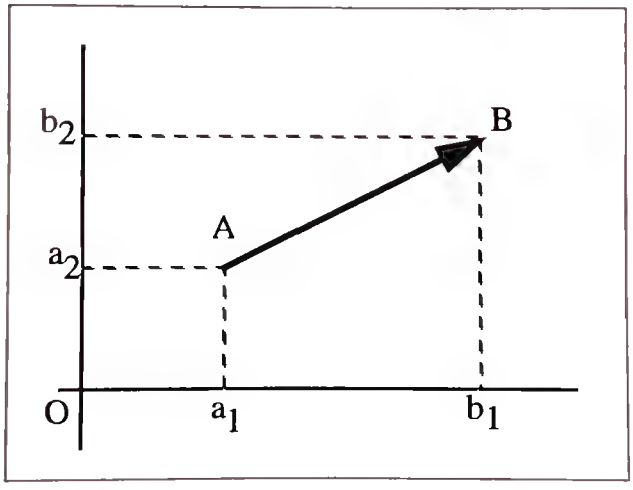
Se comprueba fácilmente que con esta definición se satisfacen las siguientes propiedades:

- Todo vector fijo AB es equivalente a sí mismo.
- Si AB es equivalente a A'B' entonces A'B' es equivalente a AB.
- Si AB es equivalente a A'B' y A'B' es equivalente a A"B", entonces AB es equivalente a A"B".

El conjunto de todos los vectores fijos equivalentes a uno dado AB recibe el nombre de *vector libre*.

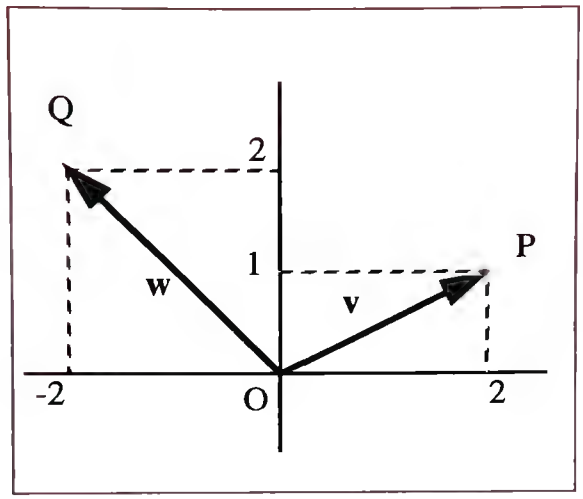
Cada uno de los vectores fijos pertenecientes a ese conjunto se llama *representante* del vector libre.

Sea el vector fijo AB de la siguiente figura



Consideremos el punto P de coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ y el punto O(0, 0), origen de coordenadas. Es fácil comprobar que el vector fijo OP es equivalente al vector fijo AB. Utilizaremos OP como representante del vector libre formado por todos los vectores fijos equivalentes a AB. A partir de ahora designaremos los vectores libres por letras **v**, **w**, ...

Es claro que para cada punto del plano, P, de coordenadas (a, b) existe un vector libre **v** = (a, b). En la siguiente figura representamos los vectores libres **v** = (2, 1) y **w** = (-2, 2).



Se tiene que dos vectores libres **v** y **w** son iguales si y sólo si sus coordenadas son iguales, es decir, $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (c, d)$, son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

13.1.1 Ejemplo

Sean A(2, 4) y B(5,3) dos puntos del plano, entonces el vector fijo AB es un representante del vector libre

$$\mathbf{v} = (5 - 2, 3 - 4) = (3, -1).$$

13.1.2 Ejemplo

Dado el vector libre $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -1)$ y el punto A(-3, 4) vamos a hallar el punto B tal que el vector fijo AB sea representante del vector **v**.

Solución

Sea B(a, b) el punto buscado. Sabemos que

$$\mathbf{v} = (a - (-3), b - 4) = (a + 3, b - 4),$$

debe ser igual a $(\sqrt{3}, -1)$. Igualando las respectivas coordenadas obtenemos $a = \sqrt{3} - 3$ y $b = 3$. Por tanto, el punto B es $(\sqrt{3} - 3, 3)$.

Puesto que las coordenadas de un punto y las de un vector se escriben del mismo modo, hay que tener cuidado en no confundir el punto P con el vector OP.

13.1.3 Ejemplo

Sean los vectores $\mathbf{v} = (5, 3)$ y $\mathbf{w} = (\lambda + 3\,\mu, -\lambda + \mu)$. ¿Qué valores deben tener λ y μ para que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$?

Solución

Por la condición de igualdad de dos vectores se tiene que

$$5 = \lambda + 3\,\mu,$$

$$3 = -\lambda + \mu,$$

y resolviendo este sistema obtenemos los valores $\lambda = -1$ y $\mu = 2$.

El vector libre de coordenadas (0, 0) se llamará *vector nulo* y se representará por **0**.

Sea el vector **v** de coordenadas (a, b). Podemos calcular la longitud de **v** mediante el Teorema de Pitágoras. La longitud de **v** se representa por $|\mathbf{v}|$ y se llama *módulo* de **v**.

El módulo del vector **v** es el número

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

donde se toma la raíz positiva.

- Obsérvese que |v| es una magnitud escalar.

13.1.4 Ejemplo

Hállese el módulo de los siguientes vectores:

$\mathbf{v}_1 = (5, 12)$, $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{2}, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 0)$ y $\mathbf{v}_4 = (0, -3)$.

Solución

$$|\mathbf{v}_1| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{2+9} = \sqrt{11},$$

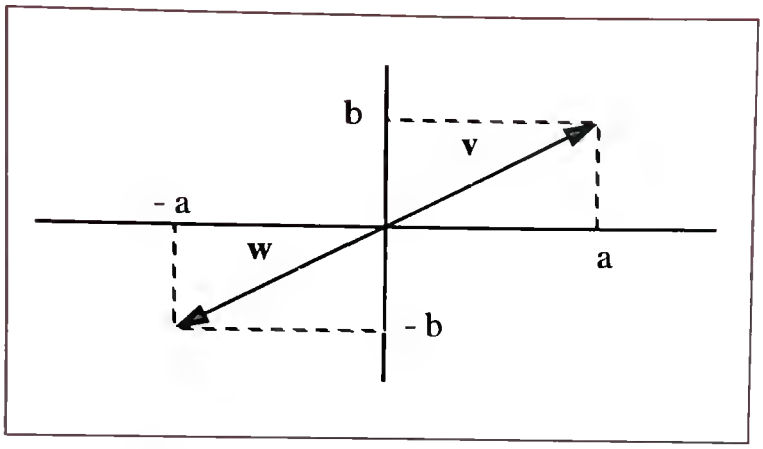
$$|\mathbf{v}_3| = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4,$$

$$|\mathbf{v}_4| = \sqrt{0 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Los dos últimos casos del ejemplo anterior muestran que si una de las coordenadas es nula, el módulo del vector es simplemente el valor absoluto de la otra coordenada.

Dado un vector **v** llamaremos *vector opuesto* de **v** al vector **w** que tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto al de **v**.

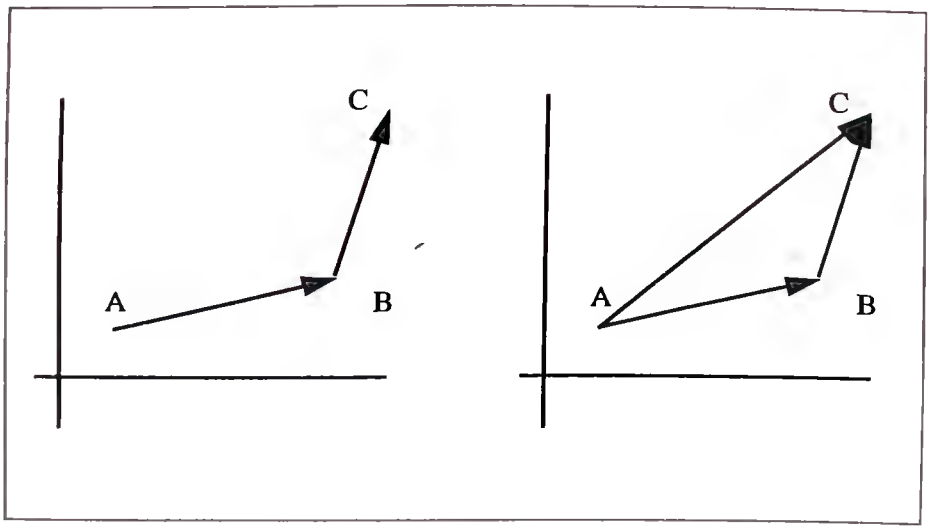
Expresándolo en coordenadas, si **v** = (a, b) entonces las coordenadas de **w** son (- a, - b), como muestra la figura siguiente:



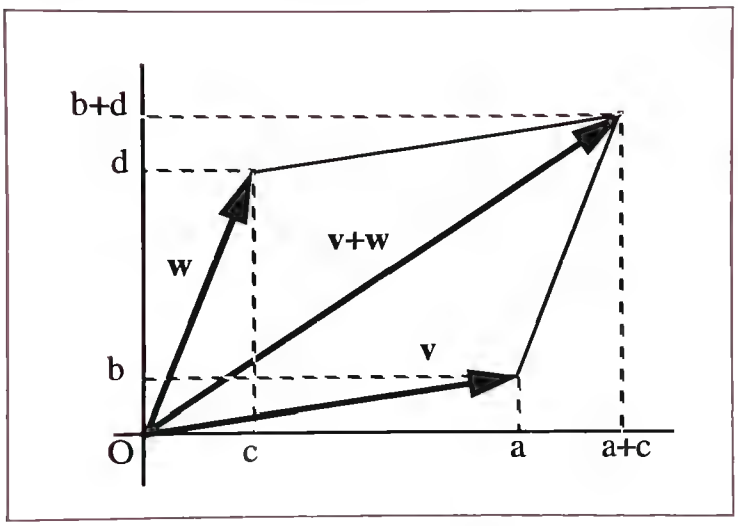
Designaremos el vector **w** opuesto de **v** por **- v**.

13.2 Operaciones con vectores

Sean tres puntos diferentes del plano A, B y C. Consideremos los vectores fijos AB y BC. El *vector suma* de ambos será el vector AC, como muestra la figura



Sean los vectores libres $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (c, d)$. Su suma será el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c, b + d)$. Gráficamente el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es una de las diagonales del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ y dos lados paralelos a ellos y de la misma longitud. En la siguiente figura vemos la relación geométrica entre $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.



Esta forma de calcular la suma de dos vectores se conoce por *regla del paralelogramo*.

13.2.1 Ejemplo

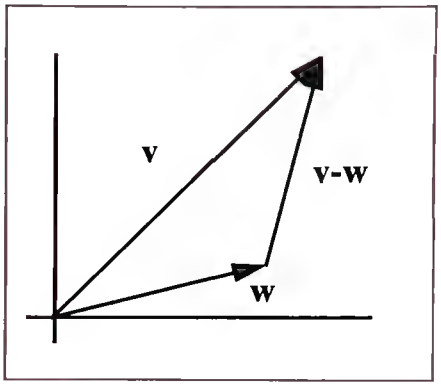
Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = (3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 6)$ y $\mathbf{v}_3 = (-5, 4)$. Entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (8, 8)$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = (-2, 6)$.

Es muy fácil comprobar que $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$. Para hallar la diferencia de dos vectores $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (c, d)$ efectuamos la suma de $\mathbf{v}$ con el opuesto de $\mathbf{w}$, que sabemos que es $-\mathbf{w} = (-c, -d)$. Por tanto

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d).$$

Gráficamente, el vector fijo cuyo origen es el extremo de $\mathbf{w}$ y su extremo

el extremo de **v** es un representante de **v - w**, como se muestra en la figura siguiente:



Se comprueba fácilmente que **v - w** y **w - v** son vectores opuestos. Otras propiedades que satisface la suma de vectores son

- $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$, para cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.
- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$, para todo vector **v**.
- $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, para todo vector **v**.

Sean el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ y el número natural n. Definimos el producto de n por **v** como la suma de n copias del vector **v**:

$$n \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v} + \ldots + \mathbf{v} = (a, b) + (a, b) + \ldots + (a, b) = (n\,a\,,\, n\,b).$$

Podemos generalizar esta definición extendiéndola al producto de un número real λ por un vector **v** del siguiente modo:

El producto de un número real por un vector es otro vector cuyas coordenadas son las del primero multiplicadas por ese número.

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda (a, b) = (\lambda a, \lambda b), \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

13.2.2 Ejemplo

Dado el vector $\mathbf{v} = (3, -2)$, efectuemos el producto de $\mathbf{v}$ por los siguientes números reales: $2, \pi, -\sqrt{2}$ y 1/4.

Solución

$2\,(3, -2) = (6, -4)$,

$\pi\,(3, -2) = (3\pi, -2\pi)$,

$-\sqrt{2}\,(3, -2) = (-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

$1/4\,(3, -2) = (3/4, -1/2)$.

Si representamos gráficamente todos los vectores del ejemplo anterior, observaremos que, en cada caso, $\mathbf{v}$ y $\lambda\mathbf{v}$ tienen la misma dirección, el sentido de ambos es el mismo o el opuesto según que λ sea positivo o negativo, respectivamente, y el módulo de $\lambda\,\mathbf{v}$ es mayor o menor que el de $\mathbf{v}$ según que $|\lambda|$ sea mayor o menor que 1.

El producto de un escalar por un vector satisface las siguientes propiedades, como es fácil comprobar, donde λ y μ son números reales:

- $\lambda (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}$.
- $(\lambda + \mu)\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$.
- $\lambda (\mu \mathbf{v}) = (\lambda \mu)\,\mathbf{v}$.

- $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- $0 \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- $(-1) \,.\, \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

13.3 Producto escalar

Definimos a continuación un producto de vectores. Obsérvese el artículo indeterminado. Es debido a que se puede definir diferentes productos de vectores, como se verá más adelante. En este tema se introduce el *producto escalar*, llamado así porque el resultado del producto de dos vectores no es un nuevo vector sino un número real, es decir, un escalar.

Dados los vectores $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (c, d)$ se define el producto escalar de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como el número real $a \,.\, c + b \,.\, d$. En símbolos,

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = (a, b) \bullet (c, d) = a \,.\, c + b \,.\, d.$$

13.3.1 Ejemplo

Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 3)$. Calculemos los productos escalares de cada dos de ellos.

$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 2 \,.\, (-3) + 4 \,.\, 5 = 14$,

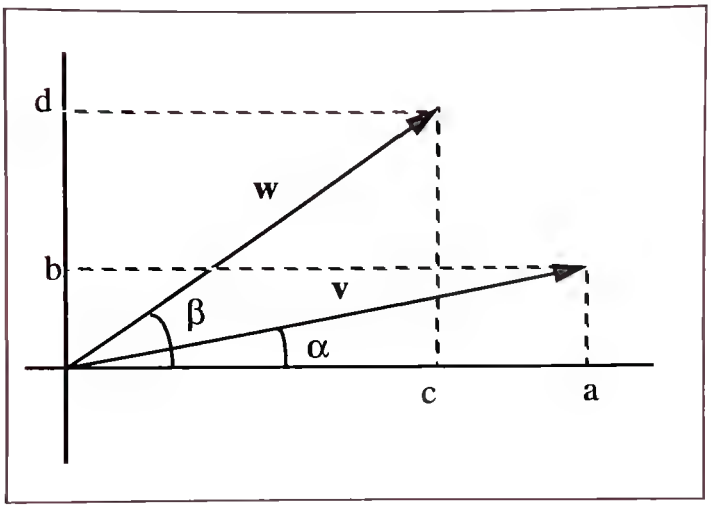
$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3 = 2 \,.\, 0 + 4 \,.\, 3 = 12$,

$\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = (-3) \,.\, 0 + 5 \,.\, 3 = 15$.

Puesto que el producto de números reales satisface la propiedad

conmutativa, es inmediato que $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$.

Estudiamos ahora el significado geométrico del producto escalar de dos vectores del plano. Consideremos la siguiente figura



Sabemos por el tema 11 que

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

y, análogamente

$$\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\beta - \alpha$. De las fórmulas de la Sección 11.6

tenemos que

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha,$$

y sustituyendo por las expresiones anteriores tenemos

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

El numerador de esta expresión es precisamente el producto escalar $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$. Por tanto,

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|},$$

y de aquí,

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \,.\, |\mathbf{w}| \,.\, \cos(\beta - \alpha).$$

Podemos enunciar entonces:

el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

En la figura anterior los dos vectores están situados en el primer cuadrante, y el ángulo que formañ es agudo, pero la interpretación es la misma aunque estén situados en diferentes cuadrantes, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

13.3.2 Ejemplo

Sean $\mathbf{v} = (6, 2\sqrt{3})$ y $\mathbf{w} = (-\sqrt{3}, 1)$. Su producto escalar es

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 6 \,.\, (-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}) \,.\, 1 = -4\sqrt{3},$$

y, por tanto, el coseno del ángulo que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es

$$\cos\alpha = \frac{(-4)\sqrt{3}}{\sqrt{48}\sqrt{4}} = \frac{(-4)\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{-1}{2},$$

y de aquí obtenemos que $\alpha = 120°$.

Se sugiere, como ejercicio, representar gráficamente los vectores dados en el ejemplo.

De lo anterior se deduce inmediatamente que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ para todo vector $\mathbf{v}$.

Dos vectores no nulos que forman un ángulo de 90° son *perpendiculares* u *ortogonales*.

> La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean ortogonales es que su producto escalar sea nulo.

Ya que entonces el coseno del ángulo α que forman es 0 y por tanto $\alpha = 90°$.

13.3.3 Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1 = (3, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 4)$ y $\mathbf{v}_4 = (2, b)$. Se tiene que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales ya que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$ no son ortogonales puesto que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 1 \neq 0$. El vector $\mathbf{v}_4$ será ortogonal al vector $\mathbf{v}_1$ para un cierto valor de b:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = 6 - 2b = 0,$$

es decir, para b = 3. Para cualquier otro valor de b, los dos vectores no son ortogonales.

Veamos ahora otras dos propiedades del producto escalar. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores cualesquiera y λ un número real. Es fácil comprobar

que

- $(\lambda . \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \lambda . (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$.
- $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$.

Diremos que dos vectores son *colineales* cuando están situados sobre la misma recta. Anteriormente vimos que $\mathbf{v}$ y $\lambda.\mathbf{v}$ son colineales. El recíproco también es cierto.

Dos vectores no nulos son colineales si y sólo si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si y sólo si $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (\lambda a, \lambda b)$, donde λ es un número real no nulo.

Según que λ sea positivo o negativo los dos vectores tendrán el mismo sentido (y formarán un ángulo de $0°$) o sentidos opuestos (y formarán un ángulo de $180°$).

13.4 Combinación lineal de vectores

Recordemos que dado un vector $\mathbf{v}$ y un escalar $\lambda \neq 1$, el vector $\lambda\mathbf{v}$ es, en general, distinto del vector $\mathbf{v}$ y que dados dos vectores no nulos, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, su suma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es otro vector distinto de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Sean ahora $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (c, d)$ dos vectores y λ y μ dos números reales. El vector

$$\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = \lambda (a, b) + \mu (c, d) = (\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d),$$

es otro vector distinto, en general, de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{w}$.

Diremos que un vector $\mathbf{u} = (x, y)$ es *combinación lineal* de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{w}$, o también, que $\mathbf{u}$ *depende linealmente* de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{w}$ si existen dos números reales λ y μ tales que

$$\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}.$$

13.4.1 Ejemplo

El vector (5, 2) es combinación lineal de los vectores (1, - 1) y (3, - 2) ya que

$$(5, 2) = \lambda\,(1, -1) + \mu\,(3, -2) = (\lambda + 3\,\mu, -\lambda - 2\,\mu),$$

es decir,

$$\lambda + 3\,\mu = 5,$$

$$-\lambda - 2\,\mu = 2.$$

Y resolviendo el sistema obtenemos $\lambda = -16$, $\mu = 7$.

Diremos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *linealmente independientes* si al expresar el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{w}$, es decir

$$\mathbf{0} = \lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w},$$

se obtiene que λ y μ son necesariamente nulos.

13.4.2 Ejemplo

Los vectores (1, - 1) y (3, - 2) son linealmente independientes ya que de la igualdad

$$\lambda\,(1, -1) + \mu\,(3, -2) = (\lambda + 3\,\mu, -\lambda - 2\,\mu) = (0, 0),$$

obtenemos el sistema

$$\lambda + 3\mu = 0,$$

$$-\lambda - 2\mu = 0,$$

cuya única solución es $\lambda = \mu = 0$.

Dos vectores colineales no pueden ser linealmente independientes ya que, como hemos visto antes, son de la forma $\mathbf{v} = (a, b)$, $\mathbf{w} = (\lambda a, \lambda b)$ con $\lambda \neq 0$, y por tanto existen dos números reales no simultáneamente nulos, por ejemplo $-\lambda$ y 1, tales que

$$-\lambda \mathbf{v} + 1 \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Observemos que dado cualquier vector $\mathbf{v} = (a, b)$ podemos expresarlo de modo inmediato como combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, ya que

$$a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b),$$

además, es fácil comprobar que los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes.

Dados dos vectores linealmente independientes, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cualquier otro vector $\mathbf{u}$ del plano puede expresarse como combinación lineal de ellos, como comprobamos en un ejemplo concreto.

13.4.3 Ejemplo

Sean $\mathbf{v} = (3, 2)$ y $\mathbf{w} = (1, -4)$. Puesto que sus coordenadas no son proporcionales sabemos que son linealmente independientes. Sea $\mathbf{u} = (a, b)$ un vector cualquiera. Imponemos que

$$\mathbf{u} = (a, b) = \lambda(3, 2) + \mu(1, -4) = (3\lambda + \mu,\ 2\lambda - 4\mu),$$

lo que proporciona el sistema

$$3\lambda + \mu = a,$$

$$2\lambda - 4\mu = b,$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{4a + b}{14}, \qquad \mu = \frac{2a - 3b}{14}.$$

Por ejemplo, el vector particular $\mathbf{u} = (5, 3)$ se expresará como

$$\mathbf{u} = (23/14)\ \mathbf{v} + (1/14)\ \mathbf{w},$$

como puede comprobarse fácilmente.

Del resultado anterior se deduce inmediatamente que en el plano no puede haber tres vectores linealmente independientes.

13.4.4 Ejemplo

Sean **u**, **v**, y **w** los vectores del ejemplo anterior. Vamos a comprobar que existen tres números reales λ_1, λ_2 y λ_3, no todos nulos tales que

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 \mathbf{w},$$

por ejemplo, podemos tomar $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -23/14$ y $\lambda_3 = -1/14$ y se tiene entonces

$$\mathbf{u} - 23/14\ \mathbf{v} - 1/14\ \mathbf{w} = (23/14\ \mathbf{v} + 1/14\ \mathbf{w}) - 23/14\ \mathbf{v} - 1/14\ \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Un conjunto S de vectores del plano tales que cualquier otro vector del plano se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S,

se llama *sistema generador*. Un sistema generador en el cual los vectores son linealmente independientes se llama *base*.

De los ejemplos anteriores se deduce que en el plano dos vectores linealmente independientes cualesquiera forman una base y que toda base ha de tener dos vectores. En el tema 15 se generalizarán estas definiciones.

En particular, la base más sencilla del plano es la vista anteriormente formada por los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, llamada *base canónica*.

Se llama *vector unitario* a cualquier vector de módulo igual a 1.

Dado cualquier vector no nulo $\mathbf{v} = (a, b)$ podemos obtener fácilmente un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{v}$ del siguiente modo:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (a, b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

y es inmediato comprobar que el módulo de $\mathbf{w}$ es 1.

13.4.5 Ejemplo

Obténgase una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en el plano con las siguientes condiciones: los dos vectores forman un ángulo de 45°, uno de ellos es unitario y el otro tiene módulo 3.

Solución

Puesto que tenemos amplia libertad de elección para el primer vector, tomemos $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, que es unitario. Sea $\mathbf{w} = (a, b)$. Por la fórmula del producto escalar tenemos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos 45°,$$

que es equivalente a

$$(1,0)\bullet(a,b)=a=1\,.\,3\,.\,\sqrt{2}/2,$$

de donde obtenemos la primera coordenada de **w**. Por otra parte, de la condición $|\mathbf{w}|=3$ podemos escribir

$$3=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+b^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+b^2},$$

y operando obtenemos finalmente

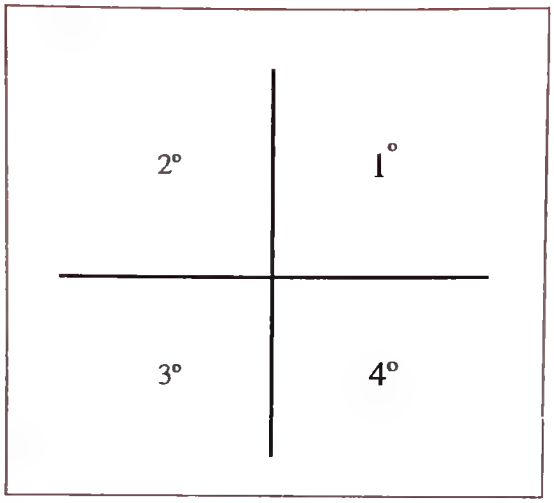
$$b=\pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, tenemos dos elecciones para **w**:

$$\mathbf{w}=(3\frac{\sqrt{2}}{2},3\frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\mathbf{w}=(3\frac{\sqrt{2}}{2},-3\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

En las aplicaciones geométricas las bases más usadas son las formadas por vectores ortogonales y unitarios, llamadas *bases ortonormales*. Veamos un ejemplo en el plano. Recordemos previamente que los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones, llamadas *cuadrantes*, numerados según la figura siguiente:



13.4.6 Ejemplo

Constrúyase una base ortonormal $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ con las siguientes condiciones: $\mathbf{v}$ está situado en el tercer cuadrante y sobre la recta que contiene al vector $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{w}$ está situado en el segundo cuadrante.

Solución

Un vector unitario situado en la misma recta que el vector $\mathbf{u}$ será , por ejemplo:

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2, 3) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right),$$

pero este vector está situado sobre el primer cuadrante. Su opuesto $-\mathbf{u}'$ estará en el tercer cuadrante. Por tanto, tomamos $\mathbf{v} = -\mathbf{u}'$.

Sea $\mathbf{w} = (a, b)$, sabemos que la condición para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean ortogonales es que su producto escalar sea cero. Así pues

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) \cdot (a, b) = \frac{-2a - 3b}{\sqrt{13}} = 0,$$

y de aquí obtenemos que

$$b = -2/3\ a,$$

luego

$$\mathbf{w} = (a, -2/3\ a).$$

Por la condición de que $\mathbf{w}$ sea unitario podemos escribir

$$|\mathbf{w}| = 1 = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}},$$

es decir

$$13a^2 = 9,$$
$$a = \pm\sqrt{\frac{9}{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Por tanto

$$b = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Como $\mathbf{w}$ debe estar situado en el segundo cuadrante, la primera coordenada de $\mathbf{w}$ debe ser negativa y la segunda positiva. Así pues

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right),$$

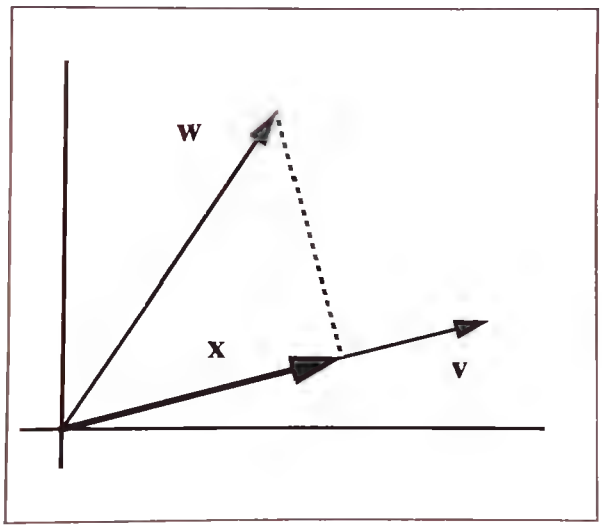
y la base buscada está formada por los vectores

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right), \qquad \mathbf{w} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

13.5 Ejercicios

1.- Calcúlese b para que los vectores $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$ y $\mathbf{w} = (1, b)$ formen un ángulo de 45°, medido de **v** a **w**.

2.- Dados los vectores $\mathbf{v} = (4, 1)$ y $\mathbf{w} = (2, 3)$, calcúlese la longitud de la proyección **x** de **w** sobre **v**, como indica la figura



3.- Demuéstrese que para cualquier par de vectores no nulos **v** y **w** los vectores **v** y **u** son ortogonales, donde

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v}.$$

4.- Sea el paralelogramo ABCD. Mediante el producto escalar de vectores demuéstrese que

a) ABCD es un rombo si y sólo si sus diagonales AC y BD son perpendiculares.

b) La suma de los cuadrados de los lados del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

5.- Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, 3)$ y $\mathbf{w} = (-6, b)$, hállese a partir de ellos una base ortonormal $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, es decir, $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{w}'$ deben ser vectores unitarios, ortogonales y estar situados en la misma recta que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, respectivamente. Exprésense los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{w}'$.

TEMA 14

Los números complejos

Consideremos la ecuación $x^2 + 9 = 0$. Si intentamos resolverla obtenemos $x^2 = -9$. Ahora bien, el cuadrado de todo número real es un número real no negativo. Por tanto, no existe ningún número real que sea solución de esa ecuación, lo cual exige introducir otros números, llamados complejos, que permitan resolver ecuaciones como la dada. Se verá también a lo largo de este tema que los números reales son un caso particular de los números complejos.

Observemos que el número -9 puede expresarse como $9(-1)$ y, en general, cualquier número real negativo $-a$ puede expresarse como $a(-1)$. En la ecuación anterior podríamos escribir

$$x^2 = -9 = 9(-1),$$

o bien

$$x = \pm\sqrt{9(-1)} = \pm 3\sqrt{-1}.$$

Bastaría, por tanto, saber qué significado tiene $\sqrt{-1}$ para poder resolver ecuaciones como la del ejemplo. Definimos entonces un nuevo número, que se designa por la letra i, mediante la condición $i^2 = -1$, o bien $i = +\sqrt{-1}$.

Así pues, las raíces cuadradas del número real negativo $-a$ serán

$$\pm \sqrt{-a} = \pm \sqrt{a(-1)} = \pm \sqrt{a}\sqrt{-1} = \pm \sqrt{a}\, i.$$

14.1 Definiciones. Números complejos en forma binómica

Llamaremos *número complejo* a todo número de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales. El conjunto de todos los números complejos se designa por **C**.

14.1.1 Ejemplo

Los números $3 + 4i$, $-7 + 2i$, $\sqrt{3} - 5i$ y $\pi + 2i$ son números complejos.

• Obsérvese que los números de las formas a y bi son también números complejos, ya que $a = a + 0i$ y $bi = 0 + bi$. Los primeros son los números reales obviamente, por lo que **R** es un subconjunto de **C**. Los de la forma bi se llaman *imaginarios puros*.

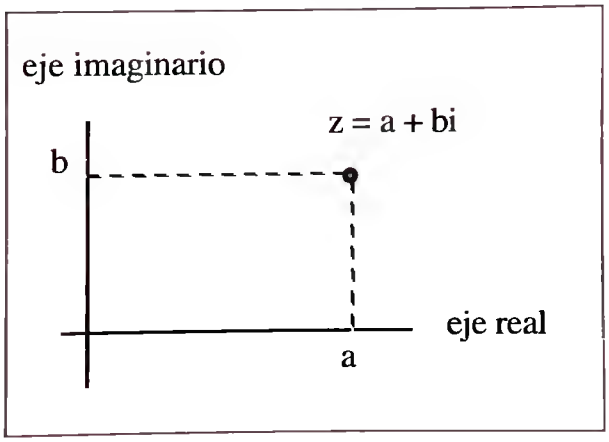
Dado el número complejo $z = a + bi$ llamaremos a los números reales a y b, *parte real* y *parte imaginaria* de z, respectivamente, y se designarán por $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$. Así pues

$$\mathrm{Re}(z) = a,$$

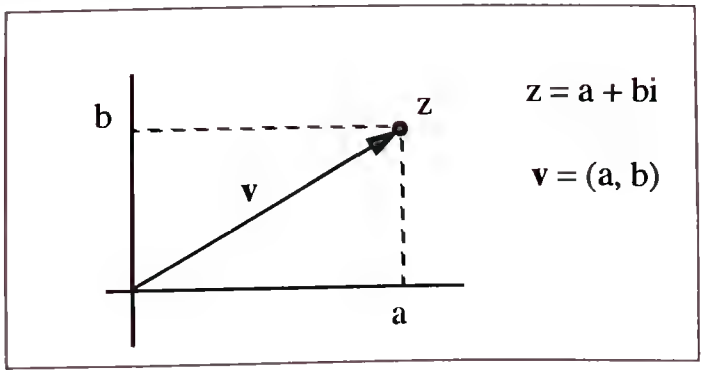
$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

- Hay que evitar confundir un número imaginario puro, por ejemplo el 5i, con la parte imaginaria de un número complejo, que es siempre un número real. En el caso del número 5i su parte real es 0 y su parte imaginaria es 5.

Podemos representar gráficamente los números complejos en el plano del siguiente modo: el número complejo $z = a + bi$ vendrá representado por el punto de coordenadas (a, b), como muestra la siguiente figura



En el tema anterior se estudiaron los vectores del plano. La próxima figura nos permite ver la relación existente entre estos vectores y los números complejos



Llamaremos *módulo* del número complejo $z = a + bi$ al módulo del vector $\mathbf{v} = (a, b)$, es decir

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

donde tomamos la raíz positiva.

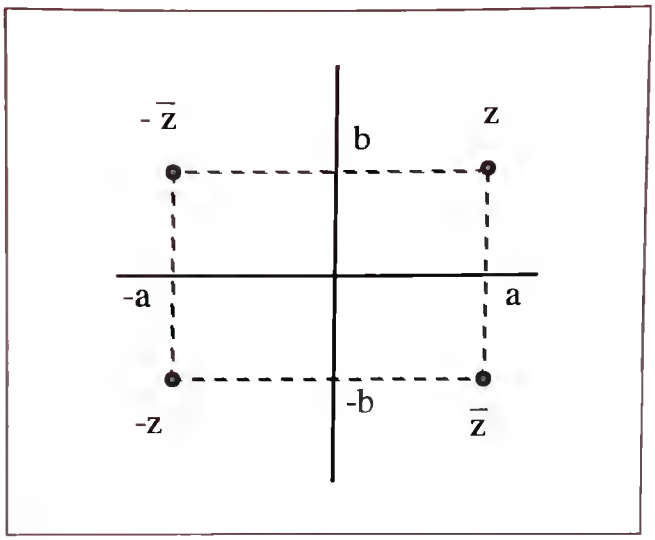
- Es obvio que $|z| > 0$ para todo $z \in \mathbf{C}$, excepto cuando $z = 0 + 0i = 0$, y en este caso $|z| = 0$.

Se llama *opuesto* del número complejo $z = a + bi$ al número complejo $-a - bi$, que designaremos por $-z$.

Se llama *conjugado* del número complejo $z = a + bi$ al número complejo $a - bi$, que designaremos por $\bar{z}$.

- Obsérvese que el conjugado del número z tiene la misma parte real que z y la parte imaginaria de signo opuesto a la de z.

En la próxima figura podemos ver la relación geométrica que existe entre los números complejos z, $-z$, $\bar{z}$ y $-\bar{z}$.



La forma de escribir un número complejo z como a + bi se llama *forma binómica*. También se escribe a veces z = a + ib. Utilizaremos las dos notaciones indistintamente.

Más adelante veremos otra forma de expresar un número complejo, distinta a la forma binómica.

14.2 Operaciones con números complejos en forma binómica

Dados dos números complejos z = a + bi, w = c + di, definimos la *suma* z + w como el nuevo número complejo (a + c) + i(b + d).

Como consecuencia de las propiedades de los números reales se demuestra fácilmente que la suma de números complejos satisface las propiedades siguientes:

- Asociativa:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad \text{para } z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}.$$

- Existencia de elemento neutro:

Existe el número complejo $0 = 0 + 0i$, tal que para todo número complejo z se tiene que $z + 0 = 0 + z = z$.

- Existencia de elementos opuestos:

Para cada número complejo z existe otro número complejo, $-z$, tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

- Conmutativa:

$$z + w = w + z, \qquad \text{para } z, w \in \mathbf{C}.$$

Estudiamos ahora el producto en **C**. En primer lugar veremos el producto de un número real por un número complejo. Sean $\lambda \in \mathbf{R}$ y $z \in \mathbf{C}$, con $z = a + bi$.

El producto del número real λ por el número complejo $z = a + bi$ es el número complejo $\lambda a + \lambda bi$, es decir

$$\lambda z = \lambda (a + bi) = \lambda a + \lambda bi.$$

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, para efectuar el producto zw seguiremos los siguientes pasos:

- Aplicamos la propiedad distributiva.

- Sustituimos i^2 por -1 en el término que lo contenga.

• Agrupamos los términos que no contengan i, lo que nos proporciona la parte real del producto, y agrupamos los términos que contengan i, lo que nos dará la parte imaginaria del producto.

Veamos estos pasos en los siguientes ejemplos.

14.2.1 Ejemplos

a) $(3 - 2i)(4 + 3i) = 3.4 + 3.3i - 2.4i - 6.i^2 = 12 + 9i - 8i + 6 = 18 + i.$

b) $(-2 + 4i)(2i) = -4i - 8 = -8 - 4i.$

c) $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3.3 - 3.4i + 4.3i - 16.i^2 = 25.$

A la vista de los anteriores ejemplos podemos escribir en general

El producto de los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ es el número complejo $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

• Obsérvese el caso c) de 14.2.1: el producto de ese número complejo por su conjugado es un número real. Este resultado es cierto en general, ya que

$$z\,\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}.$$

Además, se observa que $z\,\bar{z} = |z|^2$. Utilizaremos más adelante este resultado que nos permitirá calcular el cociente de dos números complejos.

A partir de las propiedades de los números reales, se puede demostrar fácilmente las siguientes propiedades del producto de los números complejos:

• Asociativa:

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3, \qquad \text{para} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}.$$

- Existencia de elemento unidad:

Existe un número complejo, el $1 = 1 + 0i$, tal que para todo número complejo z se tiene que $1 z = z 1 = z$.

- Existencia de inversos:

Para todo número complejo $z \neq 0$ existe otro número complejo, que designamos por z^{-1}, tal que $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$. Puede comprobarse que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

- Conmutativa:

$$z w = w z, \qquad z, w \in \mathbf{C}.$$

Además se satisface la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números complejos:

$$w (z_1 + z_2) = w z_1 + w z_2, \qquad w, z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Vamos a estudiar ahora el cociente de dos números complejos. En primer lugar vamos a ver un ejemplo con dos números concretos. Sean, por ejemplo, los números complejos $3 + 2i$ y $4 - 3i$. Sería deseable que su cociente sea otro número complejo, que designaremos por $x + yi$. Por la definición del producto de números complejos tenemos

$$3 + 2i = (4 - 3i) (x + yi) = (4x + 3y) + (4y - 3x) i,$$

e igualando las partes reales e imaginarias del primer y el último miembro de la igualdad obtenemos el sistema

$$3 = 4x + 3y,$$

$$2 = -3x + 4y,$$

que resuelto nos proporciona $x = 6/25$ e $y = 17/25$. Así pues

$$\frac{3+2i}{4-3i} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.$$

Se observa que el proceso exige resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, a veces, puede ser largo y molesto. Veamos un método más directo. Observemos que el denominador de las partes real e imaginaria del cociente es 25. Este número es el cuadrado del módulo del denominador, 4 - 3i. Hemos visto anteriormente que $z\,\bar{z} = |z|^2$. Por tanto, si en el cociente inicial multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, 4 + 3i, tenemos

$$\frac{3+2i}{4-3i} = \frac{(3+2i)\,(4+3i)}{(4-3i)\,(4+3i)} = \frac{12+9i+8i-6}{25} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.$$

Así se obtiene el cociente de manera mucho más rápida que por el procedimiento anterior. Podemos generalizar lo que hemos hecho en este ejemplo particular.

Dados los números complejos z y w, con $w \neq 0$, el cociente de ambos es el número complejo

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Estudiamos a continuación las potencias de exponente natural de un

número complejo. Sea $z = a + bi$. Para calcular z^n, con n natural, utilizaremos la fórmula del binomio de Newton, vista en el tema 4, pero antes estudiemos las sucesivas potencias de i.

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i,$$
$$i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \qquad i^6 = -1, \ldots$$

Se observa que las sucesivas potencias de i se repiten después de cuatro pasos, proporcionando tan sólo cuatro valores distintos, i, -1, $-i$ y 1. Como $i^4 = 1$, se tiene que $(i^4)^k = 1$, cualquiera que sea el número natural k. Para calcular i^n bastará expresar el exponente como $n = 4k + r$, donde k es un entero no negativo y el resto r es $0, 1, 2$ ó 3. Por tanto,

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} i^r = 1\, i^r = i^r,$$

y este número será $i, -1, -i$ ó 1, según que r sea $1, 2, 3$ ó 0.

14.2.2 Ejemplo

a) $i^{325} = i^{4.81+1} = i^1 = i.$

b) $i^{219} = i^{4.54+3} = i^3 = -i.$

c) $i^{1000} = i^{4.250+0} = i^0 = 1.$

Estamos ya en condiciones de calcular las potencias de cualquier número complejo. Se aplicará la fórmula del binomio de Newton y después se agruparán todos los términos que no contienen i, lo que dará la parte real de la potencia, y se agruparán los términos que contienen i, lo que dará la parte imaginaria de la potencia.

14.2.3 Ejemplo

Calculemos $(1 + 2i)^5$.

Solución

$$(1+2i)^5 = 1 + 5.1^4.2i + 10.1^3.(2i)^2 + 10.1^2.(2i)^3 + 5.1.(2i)^4 + (2i)^5$$
$$= 1 + 10\,i - 40 - 80\,i + 80 + 32\,i$$
$$= 41 - 38\,i.$$

Estudiamos ahora las raíces cuadradas de los números complejos. En primer lugar veremos un ejemplo particular.

Dado el número complejo $z = 5 + 12i$, el número complejo $w = x + yi$ será una raíz cuadrada de z si $w^2 = z$, es decir si

$$(x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

es igual a $5 + 12i$. Igualando las partes real e imaginaria de ambos números obtenemos el sistema no lineal

$$x^2 - y^2 = 5,$$

$$2xy = 12.$$

Para resolverlo despejamos la incógnita y en la segunda ecuación y sustituimos su valor en la primera:

$$y = \frac{6}{x},$$

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5,$$

que es equivalente a

$$x^4 - 36 = 5x^2,$$

o bien

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Para resolver esta ecuación hacemos $t = x^2$ con lo que obtenemos una ecuación de segundo grado en la incógnita t

$$t^2 - 5t - 36 = 0,$$

que resuelta nos proporciona $t = 9$ y $t = -4$. Por tanto

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3,$$

o

$$x = \pm\sqrt{-4}.$$

El segundo resultado no tiene sentido ya que x debe ser real. Así pues $x = 3$, ó $x = -3$. Sustituyendo en la expresión de y los valores de x se tiene que $y = 2$ ó $y = -2$. Por tanto las dos raíces cuadradas buscadas son

$$w_1 = 3 + 2i,$$

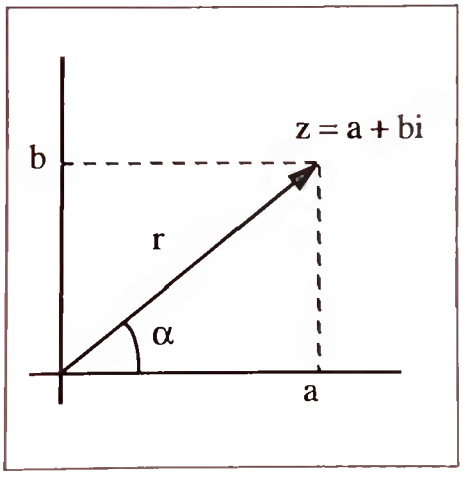
y

$$w_2 = -3 - 2i.$$

Como se aprecia, el procedimiento es laborioso y la resolución del sistema no lineal puede ser muy engorrosa en general. Además este procedimiento resulta impracticable para calcular raíces cúbicas, cuartas, etc. Más adelante veremos otro procedimiento que permite calcular fácilmente el producto, la división, la potenciación y el cálculo de raíces de números complejos. Previamente se estudiará otra forma de expresar los números complejos, llamada forma trigonométrica, para lo cual convendrá repasar los conceptos y fórmulas estudiados en el tema 11.

14.3 Forma trigonométrica de un número complejo

Sea z un número complejo distinto de 0. Hemos visto en la sección 14.1 que z puede expresarse en forma binómica, $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la raíz cuadrada de - 1. Vamos a expresar ahora el número z en función de su módulo |z|, que designaremos por r, y del ángulo α que forma el vector (a, b) con el semieje positivo real, según se muestra en la siguiente figura



Recordemos que

$$a = r \cos \alpha,$$

y

$$b = r \operatorname{sen} \alpha.$$

Podemos escribir entonces

$$z = a + bi = r \cos \alpha + i\, r \operatorname{sen} \alpha = r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Esta forma de expresar un número complejo se llama *forma trigonométrica*. El ángulo α recibe el nombre de *argumento de* z, y se

expresa usualmente por arg(z). Obsérvese que el ángulo α no está determinado unívocamente, ya que puede variar en un múltiplo de $360°$ ó 2π radianes. Tomaremos α dentro del intervalo comprendido entre 0 y 2π, o bien entre $0°$ y $360°$, cuando expresemos el ángulo en grados. En resumen

$$\alpha \in [0, 2\pi),$$

o bien

$$\alpha \in [0°, 360°).$$

Notemos también que

$$\text{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

y, por tanto

$$\alpha = \text{arctg}\frac{b}{a}.$$

En particular, los números complejos de módulo 1 tienen la forma $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

14.3.1 Ejemplo

Escríbase el número complejo $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

Solución

El módulo de z es $r = 2$ y su argumento es $\alpha = 120°$ ó $\alpha = 300°$. Como z está situado en el segundo cuadrante tenemos que $\alpha = 120°$. Luego podemos escribir

$$z = 2\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°).$$

14.3.2 Ejemplo

Escríbase el número complejo $z = \sqrt{3}\ (\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$ en forma binómica.

Solución

Basta sustituir el coseno y el seno de $225°$ por sus respectivos valores:

$$z = \sqrt{3}\ (-\sqrt{2}/2 - i\ \sqrt{2}/2) = -\sqrt{6}/2 - i\ \sqrt{6}/2.$$

- Observemos que si z es el número $r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ entonces $\bar{z} = r(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)$.

14.4 Operaciones con complejos en forma trigonométrica

Las operaciones de producto, división, potenciación y extracción de raíces de números complejos resultan muy sencillas cuando los números se expresan en forma trigonométrica.

Sean $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$. El producto $z\,w$ será

$$z\,w = r\,s\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) =$$
$$= r\,s\,((\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i\,(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)),$$

y por las fórmulas vistas en el tema 11 tenemos que el primer paréntesis es $\cos(\alpha + \beta)$ y el segundo es $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Así pues podemos escribir

El producto de dos números complejos en forma trigonométrica es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores y su argumento es la suma de los argumentos.

- Al efectuar el producto el argumento resultante puede ser mayor que 2π ó $360°$, en ese caso hay que restarle el correspondiente múltiplo de estas cantidades hasta que el resto esté en el intervalo de definición visto anteriormente.

14.4.1 Ejemplo

Efectúese el producto de los números complejos:
$z = 3(\cos 170° + i \operatorname{sen} 170°)$ y $w = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$.

Solución

$$z\,w = 3.2(\cos(170° + 240°) + i \operatorname{sen}(170° + 240°))$$
$$= 6(\cos 410° + i \operatorname{sen} 410°) = 6(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°).$$

Para estudiar el cociente empezamos escribiendo w^{-1} en forma trigonométrica:

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{s(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta)}{s^2} = \frac{1}{s}(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta).$$

Ahora escribimos el cociente de z y w como el producto de z por el inverso de w:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{r}{s}(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta),$$

y como $\cos\beta = \cos(-\beta)$ y $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(-\beta)$ podemos escribir

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{r}{s}(\cos\alpha + i\ \operatorname{sen}\alpha)\ (\cos(-\beta) + i\ \operatorname{sen}(-\beta)),$$

es decir

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\alpha-\beta) + i\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)).$$

El cociente de dos números complejos en forma trigonométrica es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos.

14.4.2 Ejemplo

Efectúese el cociente de los números complejos:

$z = 2(\cos 47° + i \operatorname{sen} 47°)$ y $w = 3(\cos 51° + i \operatorname{sen} 51°)$.

Solución

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}(\cos(47°-51°) + i\operatorname{sen}(47°-51°)) =$$

$$\frac{2}{3}(\cos(-4°) + i\operatorname{sen}(-4°)).$$

Para expresar ese ángulo dentro del intervalo [0°, 360°) le sumamos 360°, es decir, - 4° + 360°, por lo que el resultado final es el número complejo:

$$2/3\ (\cos 356° + i \operatorname{sen} 356°).$$

Elevar un número complejo a un exponente natural es ahora extremadamente sencillo:

$$z^n = (r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha).$$

• Como en el caso del producto, si $n\alpha$ es mayor que 2π ó $360°$, debemos operar para que quede dentro del intervalo admitido.

14.4.3 Ejemplo

Sea $z = 2(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$. Calculemos z^5.

$$z^5 = 2^5(\cos 375° + i \operatorname{sen} 375°) = 32(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°).$$

Estudiamos a continuación la extracción de raíces de un número complejo en forma trigonométrica. Sea el número $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$. El número $w = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ será una raíz enésima de z si $w^n = z$. De aquí

$$w^n = s^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = z.$$

Igualando los módulos de ambos números tenemos

$$s^n = r,$$

y por tanto

$$s = \sqrt[n]{r}.$$

Igualando los argumentos y teniendo en cuenta que el seno y el coseno de un ángulo cualquiera θ son iguales, respectivamente, al seno y al coseno de $\theta + 2k\pi$, donde k es un entero cualquiera, tenemos

$$n\beta = \alpha + 2k\pi,$$

o bien

$$\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

donde β se toma en el intervalo $[0, 2\pi)$. Para el cálculo basta considerar los n valores de k, $k = 0,1, \ldots, n-1$.

14.4.4 Ejemplo

Calculemos las raíces quintas de $z = -32$.

Solución

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32\,(\cos 180° + i\ \operatorname{sen} 180°)} =$$

$$\sqrt[5]{32}\,(\cos\frac{180° + 360°k}{5} + i\ \operatorname{sen}\frac{180° + 360°k}{5}),$$

para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. Luego las cinco raíces quintas son

$$z_1 = 2\,(\cos 36° + i \operatorname{sen} 36°),$$

$$z_2 = 2\,(\cos 108° + i \operatorname{sen} 108°),$$

$$z_3 = 2\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°),$$

$$z_4 = 2\,(\cos 252° + i \operatorname{sen} 252°),$$

$$z_5 = 2\,(\cos 324° + i \operatorname{sen} 324°).$$

Observemos que los argumentos de dos raíces consecutivas del ejemplo anterior difieren en $72°$, es decir $2\pi/5$. En general, los argumentos de dos raíces enésimas consecutivas de un número complejo diferirán en $2\pi/n$. Como todas las raíces tienen el mismo módulo, s, al representar gráficamente las raíces enésimas de un número complejo,

éstas caerán en los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio s. Un caso particularmente interesante lo constituyen las raíces enésimas de la unidad, que estudiamos en un ejemplo concreto.

14.4.5 Ejemplo

Calcúlense las raíces novenas del número complejo $z = 1 = 1 + 0i$.

Solución

El 1 en forma trigonométrica es $1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$. Como dos raíces novenas consecutivas diferirán en $360°/9 = 40°$, tenemos

$$z_1 = \cos 0° + i \operatorname{sen} 0° = 1,$$

$$z_2 = \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°,$$

$$z_3 = \cos 80° + i \operatorname{sen} 80°,$$

$$z_4 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°,$$

$$z_5 = \cos 160° + i \operatorname{sen} 160°,$$

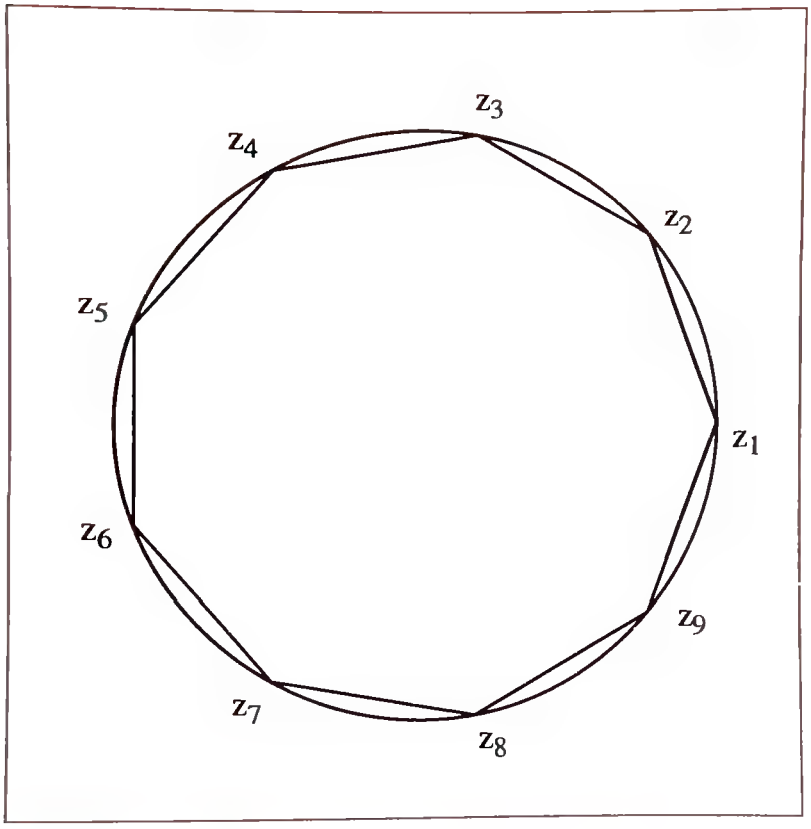
$$z_6 = \cos 200° + i \operatorname{sen} 200°,$$

$$z_7 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240°,$$

$$z_8 = \cos 280° + i \operatorname{sen} 280°,$$

$$z_9 = \cos 320° + i \operatorname{sen} 320°,$$

que aparecen representadas en la siguiente figura:



14.5 Ejercicios

1.- Calcúlese

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

b) $\dfrac{(4+3i)\ (-1+i)}{3-i}$.

2.- Hállense las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos:

a) $-1/z^2$.

b) $\dfrac{z+2}{z-2}$,

donde $z = a + bi$, siendo $z \neq 0, z \neq 2$.

3.- Demuéstrense las igualdades:

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

4.- Escríbanse los números complejos $-2+2i$ y $1-\sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

5.- Escríbanse en forma binómica los números $4(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ y $2(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$.

6.- Calcúlese z^8, donde $z = 2(1 + i\sqrt{3})$, escribiendo primero el número en forma trigonométrica.

7.- Calcúlense las raíces cúbicas de la unidad. Designémoslas por $z_0 = 1$, z_1 y z_2. Demuéstrese que z_1 y z_2 son conjugadas y que son las soluciones de la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$.

TEMA 15

Vectores del espacio

En el tema 13 se estudiaron los vectores del plano. En este tema se estudian los vectores del espacio tridimensional. Veremos que las definiciones y propiedades vistas para los vectores del plano se generalizan fácilmente para los vectores del espacio.

15.1 Definiciones

Sean A y B dos puntos del espacio tridimensional (en lo que sigue, simplemente espacio). Al igual que en el plano llamaremos *vector fijo* AB al segmento orientado de origen A y extremo B. Consideraremos dos vectores fijos AB y A'B' equivalentes si son paralelos y tienen la misma longitud y el mismo sentido. Es decir, si A, B, A' y B' son los puntos de coordenadas (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (a'_1, a'_2, a'_3) y (b'_1, b'_2, b'_3), respectivamente, entonces AB y A'B' son equivalentes si y sólo si

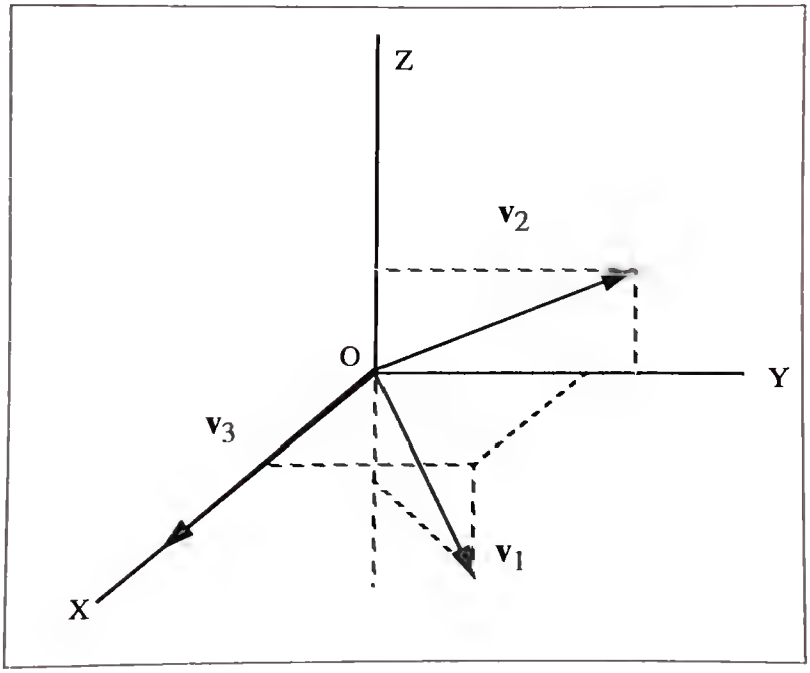
$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (b'_1 - a'_1, b'_2 - a'_2, b'_3 - a'_3).$$

Llamaremos vector libre $\mathbf{v}$, siendo AB y A'B' dos de sus representantes, a la expresión

$$\mathbf{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

15.1.1 Ejemplo

En la figura se representan los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 1)$ y $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 0)$.



Observemos que $\mathbf{v}_2$ está situado en el plano "del papel", o plano YZ, ya que su primera coordenada es 0. El vector $\mathbf{v}_3$ está situado sobre el semieje positivo OX, que es perpendicular al plano "del papel", ya que su segunda y su tercera coordenadas son nulas.

Las definiciones de vector cero, $\mathbf{0}$, vector opuesto a uno dado, $-\mathbf{v}$, módulo de un vector, $|\mathbf{v}|$, y las operaciones de suma de vectores del espacio, el producto de un número real por un vector y el producto escalar de dos vectores, son totalmente análogas a las estudiadas en el tema 13 para los vectores del plano y satisfacen las mismas propiedades que aquéllas. Resumimos todas estas definiciones para los vectores del espacio.

- El vector cero es el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.
- El vector opuesto a $\mathbf{v} = (a, b, c)$ es el vector $-\mathbf{v} = (-a, -b, -c)$.
- El módulo de $\mathbf{v} = (a, b, c)$ es $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Dados los vectores $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{w} = (m, n, p)$ entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + m, b + n, c + p).$$

- Dados el vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y el número real λ, el producto $\lambda\mathbf{v}$ es el vector $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$.
- Dados $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{w} = (m, n, p)$, el producto escalar de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{w}$ es

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a.m + b.n + c.p,$$

que es un número real.

Podemos considerar los vectores del plano como un caso particular de los vectores del espacio sin más que añadir a cada vector del plano, $\mathbf{v} = (a, b)$, una tercera coordenada nula, la correspondiente al eje OZ, es decir $\mathbf{v} = (a, b, 0)$.

Recordemos que un conjunto de vectores son linealmente independientes si al expresar el vector $\mathbf{0}$ como una combinación lineal de ellos, los coeficientes de la combinación lineal son necesariamente nulos. Sean $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{w} = (m, n, p)$, escribamos

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \qquad (*)$$

o, equivalentemente,

$$(0, 0, 0) = \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p) = (\lambda a + \mu m, \lambda b + \mu n, \lambda c + \mu p),$$

y, por tanto,

$$\lambda a + \mu m = 0,$$

$$\lambda b + \mu n = 0,$$

$$\lambda c + \mu p = 0.$$

Supongamos que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son linealmente independientes. Por tanto, (*) admite soluciones distintas de la solución $\lambda = 0$, $\mu = 0$. De las igualdades anteriores obtenemos, suponiendo $\mu \neq 0$:

$$m = -\frac{\lambda}{\mu}a, \qquad n = -\frac{\lambda}{\mu}b, \qquad p = -\frac{\lambda}{\mu}c,$$

y, como en el caso del plano, dos vectores no nulos son linealmente dependientes si y sólo si sus coordenadas son proporcionales.

15.1.2 Ejemplo

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 2)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 7, -1)$ son linealmente independientes, ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = (0, 0, 0) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3, \\ &= (\lambda_1, 4\lambda_1, \lambda_1) + (0, 3\lambda_2, 2\lambda_2) + (\lambda_3, 7\lambda_3, -\lambda_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3),\end{aligned}$$

lo que nos proporciona el sistema

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0.$$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda_1 = -\lambda_3$. Sustituyendo en la segunda se tiene que $3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$, y de aquí, $\lambda_2 = -\lambda_3$. Por último, la tercera ecuación proporciona $-4\lambda_3 = 0$, es decir, $\lambda_3 = 0$, y de aquí, todos los coeficientes son nulos.

15.1.3 Ejemplo

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 2)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, 2, -1)$ no son linealmente independientes ya que , como es fácil comprobar,

$$\mathbf{v}_3 = 3\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

y por tanto si expresamos el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de los tres vectores dados, existen números reales no todos nulos, por ejemplo $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$, tales que

$$\mathbf{0} = 3\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

En el tema 13 vimos que todo vector del plano puede expresarse como combinación lineal de dos vectores linealmente independientes. Análogamente, cualquier vector del espacio puede expresarse como combinación lineal de *tres* vectores linealmente independientes. Generalizando el ejemplo 15.1.3 podemos ver que este resultado es equivalente a que no pueden existir cuatro o más vectores del espacio que sean linealmente independientes.

Consideremos los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Es inmediato probar que son linealmente independientes. Todo vector del espacio, $\mathbf{v} = (a, b, c)$, puede expresarse como combinación lineal de ellos de forma inmediata:

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1) = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3,$$

y, por tanto los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ forman una base, ya que son

linealmente independientes y, como acabamos de ver, constituyen un sistema generador. Como en el caso del plano, esta base se llama *base canónica*.

15.2 Producto vectorial

Definimos ahora el producto vectorial de dos vectores del espacio, $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{w} = (m, n, p)$, que designaremos por $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. El resultado será otro vector

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} b & c \\ n & p \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 .$$

• A primera vista la definición parece un tanto arbitraria y difícil de recordar, pero es más fácil si escribimos el determinante siguiente:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix},$$

y lo desarrollamos por los menores de la primera fila, obteniendo así la expresión anterior.

15.2.1 Ejemplo

El producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes es el vector $\mathbf{0}$. Para comprobarlo sean los vectores linealmente dependientes $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{w} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. Aplicando la definición anterior tenemos

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{vmatrix} =$$

$$= (b\lambda c - c\lambda b)\,\mathbf{e}_1 - (a\lambda c - c\lambda a)\,\mathbf{e}_2 + (a\lambda b - b\lambda a)\,\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0).$$

15.2.2 Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ y $\mathbf{w} = (-3, 1, 4)$, calcúlense los productos vectoriales $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}\times\mathbf{v}$.

Solución

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 = (9, -1, 7),$$

$$\mathbf{w}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-9)\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (-7)\,\mathbf{e}_3 = (-9, 1, -7).$$

El resultado de este ejemplo es cierto en general, es decir

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = -\,\mathbf{w}\times\mathbf{v},$$

ya que es consecuencia de una de las propiedades de los determinantes vistas en el tema 8.

15.2.3 Ejemplo

Sea el vector $\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son los vectores del ejemplo anterior, vamos a calcular los productos escalares $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (9, -1, 7) \bullet (1, 2, -1) = 9 - 2 - 7 = 0,$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = (9, -1, 7) \bullet (-3, 1, 4) = -27 - 1 + 28 = 0.$$

El resultado del ejemplo 15.2.3 no es una casualidad. El producto vectorial $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es un nuevo vector perpendicular a los vectores dados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, como puede comprobarse en general.

- Como consecuencia se tiene que el producto escalar de $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ por cualquier combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es 0, ya que

$$\mathbf{u} \bullet (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \ (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + \mu \ (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0.$$

15.2.4 Ejemplo

Sean los vectores $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 4, 0)$. Si se representan estos vectores en el plano XY se aprecia que forman un ángulo de $60°$. Calculamos $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{e}_1 - 0\mathbf{e}_2 + 4\sqrt{3}\mathbf{e}_3 = (0, 0, 4\sqrt{3}).$$

Calculamos ahora los módulos de los tres vectores:

$$|\mathbf{u}| = 4\sqrt{3},$$

$$|\mathbf{v}| = 2,$$

$$|\mathbf{w}| = 4.$$

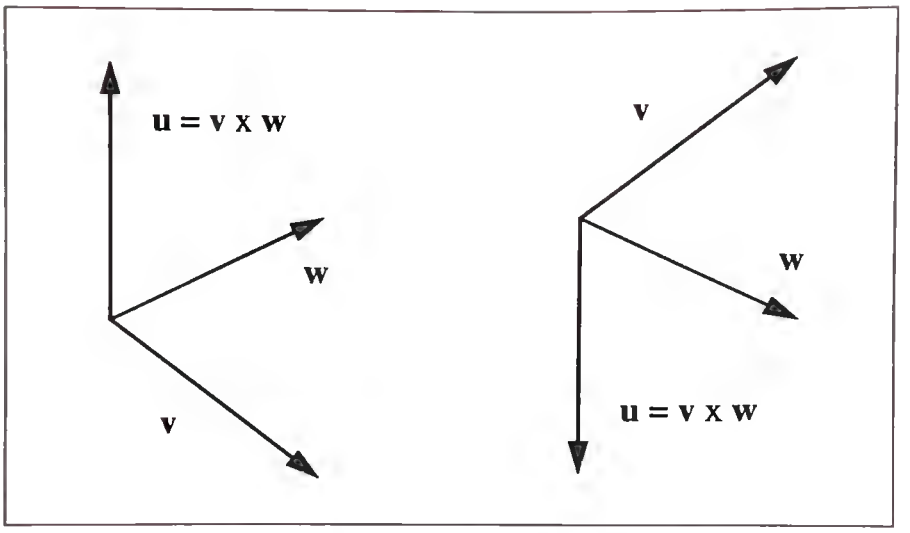
Observemos que

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\frac{\sqrt{3}}{2},$$

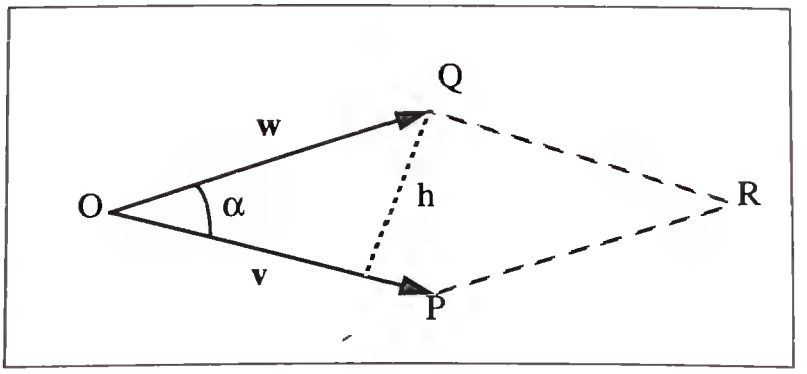
pero $\sqrt{3}/2$ es el seno de $60°$, es decir el seno del ángulo que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ medido de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$. Además vemos que el producto vectorial $\mathbf{u}$ está situado sobre el eje OZ, y por tanto es perpendicular a los vectores dados.

Los resultados de este ejemplo se pueden demostrar en general y nos permiten interpretar geométricamente el producto vectorial.

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es otro vector $\mathbf{u}$ perpendicular a los vectores dados, el módulo de $\mathbf{u}$ es el producto de los módulos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ por el seno del ángulo que forman, y el sentido de $\mathbf{u}$ es el de avance de un tornillo cuando gira de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, como muestra la siguiente figura.



La interpretación geométrica del módulo de **u** es la siguiente. Consideremos la próxima figura, donde las rectas que pasan por Q y R y por P y R son paralelas a los vectores **v** y **w**, respectivamente,



El área del triángulo OPQ es (1/2) |OP| h. Ahora bien, |OP| = |v| y h = |w| sen α. El área del paralelogramo OPRQ es el doble del área del triángulo OPQ, es decir |v| |w| sen α, pero hemos visto que este número es $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$.

15.2.5 Ejemplo

Dados los puntos del espacio A(3, 2, 1), B(0, 1, -2) y C(4, - 1, 3), calcúlese el área del triángulo ABC.

Solución

Los vectores libres representados por los vectores fijos AB y AC son, respectivamente $\mathbf{v} = (-3, -1, -3)$ y $\mathbf{w} = (1, -3, 2)$. El producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -11\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 = (-11, 3, 10),$$

y, por tanto

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{121 + 9 + 100} = \sqrt{230},$$

por lo que el área del triángulo ABC es

$$\frac{\sqrt{230}}{2}.$$

15.3 Otras propiedades del producto vectorial

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores del espacio y λ un número real. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\lambda\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \lambda\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

- $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v}\bullet\mathbf{w})^2$.

La primera de estas propiedades es consecuencia inmediata de las propiedades de los determinantes. Las otras dos las comprobamos a continuación en ejemplos concretos.

15.3.1 Ejemplo

Sean $\mathbf{u}=(1,-1,2)$, $\mathbf{v}=(4,0,3)$ y $\mathbf{w}=(-3,1,0)$.

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = (-5,-1,2),$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 = (-3,5,4),$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = (-2,-6,-2),$$

y el primero es la suma de los otros dos.

15.3.2 Ejemplo

Sean $\mathbf{v}=(-1,0,2)$ y $\mathbf{w}=(3,1,0)$,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = (-2, 6, -1),$$

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2 = 4 + 36 + 1 = 41,$$

$$|\mathbf{v}|^2 = 1 + 4 = 5,$$

$$|\mathbf{w}|^2 = 9 + 1 = 10,$$

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = -1.3 + 0.1 + 2.0 = -3,$$

$$(\mathbf{v}\bullet\mathbf{w})^2 = 9,$$

y, claramente

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v}\bullet\mathbf{w})^2.$$

15.3.3 Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son los vectores del ejemplo anterior, vamos a ver que esos tres vectores son linealmente independientes y que cualquier vector, (a, b, c), del espacio puede expresarse como combinación lineal de ellos.

En primer lugar, comprobamos que son linealmente independientes:

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} + \lambda_3\mathbf{w} \\ &= \lambda_1(-2,6,-1) + \lambda_2(-1,0,2) + \lambda_3(3,1,0) \\ &= (-2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3,\ 6\lambda_1 + \lambda_3,\ -\lambda_1 + 2\lambda_2),\end{aligned}$$

lo que nos proporciona el sistema:

$$-2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0,$$

$$6\lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos $\lambda_3 = -6\lambda_1$, y de la tercera $\lambda_2 = \lambda_1/2$. Sustituyendo en la primera se tiene

$$-2\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} - 18\lambda_1 = 0,$$

es decir, $\lambda_1 = 0$, y de aquí, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Por tanto, los tres vectores son linealmente independientes. Sea (a, b, c) un vector cualquiera del espacio. Imponiendo la condición:

$$(a, b, c) = \lambda_1 (-2, 6, -1) + \lambda_2 (-1, 0, 2) + \lambda_3 (3, 1, 0),$$

y desarrollando el segundo miembro e igualando, obtenemos el sistema:

$$-2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = a,$$

$$6\lambda_1 + \lambda_3 = b,$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = c.$$

Se comprueba fácilmente que el determinante de la matriz de los coeficientes de los λ_1, λ_2 y λ_3, es distinto de 0. Por tanto, el rango de esa matriz es 3 y el sistema es compatible y determinado. Operando, obtenemos finalmente:

$$\lambda_1 = -\frac{2a - 6b + c}{41}, \qquad \lambda_2 = -\frac{a - 3b - 20c}{41}, \qquad \lambda_3 = \frac{12a + 5b + 6c}{41}.$$

15.4 Estructura de espacio vectorial

Las propiedades estudiadas de los vectores del plano y del espacio no son exclusivas de éstos. Existen otros conjuntos de entes matemáticos que satisfacen muchas de las propiedades vistas. Sea V un conjunto de elementos en el que están definidas dos operaciones: una de ellas es la suma de dos elementos de V, que es otro elemento de V; y la otra operación es el producto de un número real por un elemento de V. Diremos que V es un *espacio vectorial real* si esas dos operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

- Asociativa de la suma:

$$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3, \qquad v_1, v_2, v_3 \in V.$$

- Existencia de elemento neutro:

Existe un elemento, que designaremos por 0, tal que para todo $v \in V$, se tiene que $v + 0 = 0 + v = v$.

- Existencia de elementos opuestos:

Para cada elemento $v \in V$ existe otro elemento, que designaremos por $-v$ y llamaremos opuesto a v, tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$. El opuesto al elemento neutro es él mismo.

- Conmutativa de la suma:

$$v + w = w + v, \qquad v, w \in V.$$

- Asociativa del producto de escalares:

$$\lambda(\mu v) = (\lambda . \mu) v, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ v \in V.$$

- Distributiva del producto respecto de la suma de vectores:

$$\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w, \qquad \lambda\in \mathbf{R},\ v,w\in V.$$

- Distributiva del producto respecto de la suma de escalares:

$$(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v, \qquad \lambda,\mu\in \mathbf{R},\ v\in V.$$

- Para todo vector $v\in V$ se tiene que $1\,v=v$.

El lector puede comprobar como ejercicio que el conjunto de las matrices con m filas y n columnas con coeficientes reales, estudiado en el tema 8, con las operaciones de suma de matrices y producto de un número real por una matriz, es un espacio vectorial real.

Otro ejemplo de espacio vectorial real lo proporciona el conjunto **C** de los números complejos, estudiado en el tema 14, con las operaciones de suma de números complejos y producto de un número real por un número complejo.

En la definición anterior de espacio vectorial hemos dicho que, en estas condiciones, el conjunto V es un espacio vectorial *real* , ya que hemos definido el producto de números reales por elementos de V. Existen otros espacios vectoriales en los que el conjunto de escalares no es **R**, sino otros conjuntos numéricos, por ejemplo, el conjunto **C** de los números complejos. En este libro no veremos ningún ejemplo de espacio vectorial no real.

Podemos generalizar las definiciones estudiadas sobre combinación lineal de vectores a cualquier espacio vectorial V.

Dados $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V, diremos que estos vectores son *linealmente independientes* si al expresar el vector 0 como combinación lineal de ellos

$$0=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n, \qquad \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in \mathbf{R},$$

la única solución que se obtiene es $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Un conjunto S de vectores de V es un *sistema generador* de V si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S. Si, además, los vectores de S son linealmente independientes, el conjunto S recibe el nombre de *base* del espacio vectorial V.

Un espacio vectorial tiene, en general, infinitas bases. Todas las bases, si son finitas, tienen el mismo número de elementos, y a este número se le llama *dimensión del espacio* V. Del estudio de los vectores del plano y del espacio se deduce que la dimensión del plano es 2 y la dimensión del espacio es 3. ¿Cuáles serían las dimensiones de los dos espacios vectoriales reales citados como ejemplos anteriormente: el de las matrices de m filas y n columnas y el de los números complejos?

15.5 Ejercicios

1.- Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{w} = (-2, 1, 0)$, hállese un vector $\mathbf{u}$ que sea perpendicular a ambos y unitario.

2.- Dados los puntos A(3, 1, 0), B(0, 1, 3) y C(3, 0, 1), calcúlese el área del triángulo ABC.

3.- Sean los vectores $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1)$ y $\mathbf{w} = (6, b, -10)$. Calcúlese b para que $\mathbf{w}$ sea combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

4.- Sean los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del problema anterior, hállese el coseno del ángulo entre ambos vectores.

5.- Constrúyase una base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ tal que $\mathbf{u}$ esté situado

en la misma recta que el vector $(1, 2, 0)$ y $\mathbf{w}$ sea de la forma $(a, 0, c)$.

TEMA 16

Geometría analítica del plano

La esencia de la Geometría Analítica consiste en asociar a los objetos geométricos, de manera natural, ciertas ecuaciones o sistemas de ecuaciones de modo que las propiedades geométricas de las figuras se puedan expresar o formular mediante propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes.

Por ejemplo, en el caso de la Geometría Analítica Plana, a cada recta del plano (en el cual se ha fijado un sistema de coordenadas cartesianas) le podemos asociar una ecuación lineal de la forma

$$a\,x + b\,y + c = 0, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ tales que } (a, b) \neq (0, 0).$$

Además, cada ecuación lineal como la anterior determina unívocamente una recta del plano. El hecho de que dos rectas del plano se corten en un punto se puede expresar por una condición de compatibilidad de un sistema de dos ecuaciones lineales que determinan a estas rectas.

La Geometría Analítica tiene numerosas aplicaciones a otras Ciencias, como la Mecánica y la Física. Además, está estrechamente relacionada con el Algebra y con el Análisis Matemático, lo que ha influido muy fructíferamente sobre el desarrollo de estas disciplinas matemáticas.

En este tema presentamos los fundamentos de la Geometría Analítica del Plano, centrándonos principalmente en el estudio de los puntos y las rectas del mismo.

16.1 Los puntos del plano

Representaremos mediante E_2 el conjunto de todos los puntos del plano, y a sus elementos, como es habitual, los denotaremos por letras mayúsculas tales como P, Q, R, A, B, C, ..., etc. Por tanto,

$$E_2 = \{P, P \text{ es un punto del plano}\}.$$

Por otra parte, V_2 denotará el conjunto de todos los vectores libres del plano:

$$V_2 = \{\mathbf{v}, \mathbf{v} \text{ es un vector libre del plano}\}.$$

- Como sabemos, los conjuntos E_2 y V_2 están relacionados entre sí. En efecto, a cada par ordenado (P, Q) de puntos de E_2 le corresponde un vector $\mathbf{v}$ de V_2, precisamente el vector libre cuyo representante es el vector fijo PQ, con origen en el punto P y extremo en Q. Representaremos este vector libre $\mathbf{v}$ mediante $\mathbf{v}_{PQ}$.

Veamos ahora algunas propiedades inmediatas:

- Dados un punto $P \in E_2$ y un vector $\mathbf{v} \in V_2$, existe un punto $Q \in E_2$ tal que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{PQ}.$$

Además este punto Q es único.

- El vector $\mathbf{v}_{PQ} = \mathbf{0}$, si y solamente si $P = Q$.

- $\mathbf{v}_{PQ} + \mathbf{v}_{QR} = \mathbf{v}_{PR}$, cualesquiera que sean los puntos P, Q y $R \in E_2$.

Decimos que hemos fijado un sistema de coordenadas cartesianas en el plano cuando hemos elegido un punto $O \in E_2$ y una base ortonormal

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ en V_2. En este caso, para cada punto P, el vector $\mathbf{v}_{OP}$ se puede escribir de manera única como combinación lineal:

$$\mathbf{v}_{OP} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2, \quad \text{con } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

El par ordenado (x, y) recibe el nombre de *coordenadas cartesianas* del punto P (en función del sistema de coordenadas fijado).

Sabemos por el tema 12 cómo se representa gráficamente el punto P de coordenadas (x, y). En forma abreviada escribiremos P(x,y), si P es el punto de coordenadas (x, y). En este caso, x se llama *abscisa* del punto P e y se llama *ordenada* del punto P. El punto O se llama *origen de coordenadas*.

16.1.1 Ejemplo

Las coordenadas del origen O son (0, 0) ya que

$$\mathbf{v}_{OO} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2.$$

Si $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$, escribiremos abreviadamente,

$$\mathbf{v} = (x, y).$$

Recordemos que si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ entonces

$$\mathbf{v}_{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

16.2 Rectas en el plano

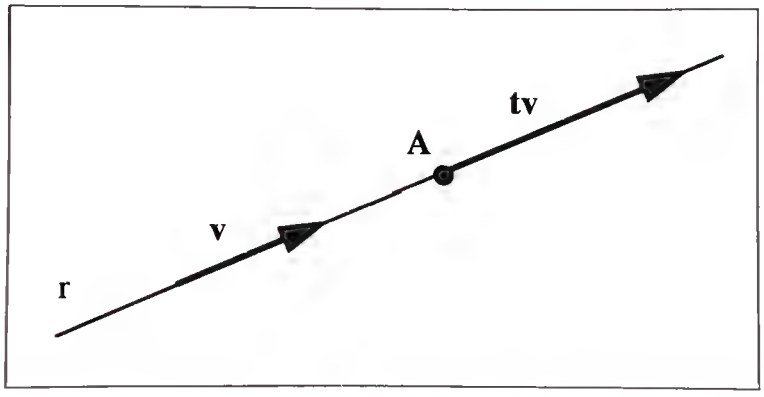
Una recta r en el plano queda determinada cuando se conocen un punto $A \in E_2$ y un vector no nulo $\mathbf{v} \in V_2$. En este caso, la recta r es el conjunto de todos los puntos $P \in E_2$ que satisfacen la relación

$\mathbf{v}_{AP} = t\mathbf{v}$, para algún $t \in \mathbf{R}$.

Simbólicamente, se escribe

$$r = \{P \in E_2, \mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}, t \in \mathbf{R}\},$$

y se entiende que para cada valor de $t \in \mathbf{R}$ obtenemos un punto de la recta r, el punto P tal que $\mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}$. En esta situación se dice que t es un parámetro. Observemos que t puede tomar todos los valores reales. Cuando t recorre el conjunto de los números reales, P describe toda la recta r. En la siguiente figura se representa la recta r determinada por el punto A y el vector no nulo **v**.



La dirección de la recta r, determinada por el punto A y el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$, es el conjunto de vectores

$$D(r) = \{t\,\mathbf{v} = (t\,v_1, t\,v_2), t \in \mathbf{R}\}.$$

16.2.1 Ejemplo

La dirección de la recta r determinada por el punto A(3, 1) y el vector $\mathbf{v} = (-1, 2)$ es el conjunto de vectores:

$$D(r) = \{t\,(-1, 2), t \in \mathbf{R}\} = \{(-t, 2\,t), t \in \mathbf{R}\}.$$

16.3 Ecuaciones de una recta en el plano

Sea r la recta determinada por el punto $A(a_1, a_2)$ y el vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Si $P(x, y)$ entonces la condición $\mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}$ se puede expresar en la forma

$$(x - a_1, y - a_2) = (t\,v_1, t\,v_2),$$

es decir

$$x - a_1 = t\,v_1,$$

$$y - a_2 = t\,v_2.$$

O bien en la forma equivalente

$$x = a_1 + t\,v_1,$$

$$y = a_2 + t\,v_2.$$

Diremos que las ecuaciones anteriores son unas *ecuaciones paramétricas* de la recta r.

16.3.1 Ejemplo

La recta r determinada por el punto $A(3, 1)$ y el vector $\mathbf{v} = (-1, 2)$ admite las ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 - t,$$

$$y = 1 + 2\,t.$$

• Observemos que podemos eliminar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas del ejemplo anterior. En efecto, despejamos t en cada una de las dos ecuaciones:

$$t = 3 - x,$$

$$t = 1/2\,(y - 1),$$

e igualamos ambas expresiones. Operando, obtenemos la ecuación

$$2x + y - 7 = 0.$$

• En general, si tenemos la recta r de ecuaciones paramétricas:

$$x - a_1 = t\,v_1,$$

$$y - a_2 = t\,v_2,$$

entonces una condición necesaria y suficiente para que el punto $P(x, y)$ esté situado en la recta r es que los vectores $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$ y $(x - a_1, y - a_2)$ sean proporcionales, lo que equivale a la condición

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 \\ y - a_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$v_2\,(x - a_1) - v_1\,(y - a_2) = 0.$$

Por tanto, $P(x, y) \in r$ si y sólo si

$$v_2 x - v_1 y - v_0 = 0, \quad \text{siendo } v_0 = v_2 a_1 - v_1 a_2 .$$

Decimos entonces que

$$a x + b y + c = 0, \quad \text{con } a = v_2,\ b = -v_1,\ c = -v_0 = -(v_2 a_1 - v_1 a_2),$$

es una *ecuación implícita* o *cartesiana* de la recta r. Observemos que en ella $(a, b) \neq (0, 0)$, puesto que $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

Si $a x + b y + c = 0$ es una ecuación implícita de r entonces

$$r = \{P(x, y) \in E_2,\ a x + b y + c = 0\}.$$

16.3.2 Ejemplo

Sea r la recta del ejemplo anterior, de ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 - t,$$

$$y = 1 + 2 t,$$

entonces $2 x + y - 7 = 0$ es una ecuación implícita de r. Observemos que si sustituimos $x = 3 - t$ e $y = 1 + 2 t$, en la ecuación $2 x + y - 7 = 0$, obtenemos $6 - 2 t + 1 + 2 t - 7 = 0$, es decir, obtenemos la identidad $0 = 0$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

16.3.3 Ejemplo

Sea r la recta determinada por $A(5, 4)$ y el vector $\mathbf{v} = (1, -1)$. Podemos obtener una ecuación implícita de r como sigue:

$$\begin{vmatrix} x - 5 & 1 \\ y - 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a

$$-x+5-y+4=0,$$

o bien

$$-x-y+9=0.$$

Otras posibles ecuaciones implícitas para esta recta son, por ejemplo

$$x+y-9=0, \quad -2x-2y+18=0, \quad \pi x+\pi y-9\pi=0.$$

16.3.4 Ejemplo

Sea $x-2y+4=0$ una ecuación implícita de una recta r del plano. Un punto P de la recta r es una solución (x, y) de dicha ecuación. Por ejemplo, los puntos $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 3)$ son puntos de la recta r. Para obtener unas ecuaciones paramétricas de r es suficiente despejar la variable x en la ecuación implícita de r:

$$x=-4+2y,$$

y hacer $y=t$. Entonces obtenemos

$$x=-4+2t,$$

$$y=t.$$

Dados dos puntos del plano $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, si $A \neq B$, el vector $\mathbf{v}_{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$ es distinto del vector $\mathbf{0}$. Por tanto, tiene sentido la recta r determinada por el punto A y el vector $\mathbf{v}_{AB}$. Por lo anteriormente expuesto en esta Sección, una ecuación implícita de r será

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es inmediato comprobar que la recta r pasa por los puntos A y B (y es, por tanto, la única recta que pasa por dichos puntos).

16.3.5 Ejemplo

Obtendremos una ecuación implícita de la recta r que pasa por los puntos A(1, 0) y B(3,1). Para ello, consideremos el vector $v_{AB} = (2, 1)$. Entonces, desarrollando el determinante en la igualdad

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

obtenemos $x - 1 - 2y = 0$, es decir

$$x - 2y - 1 = 0,$$

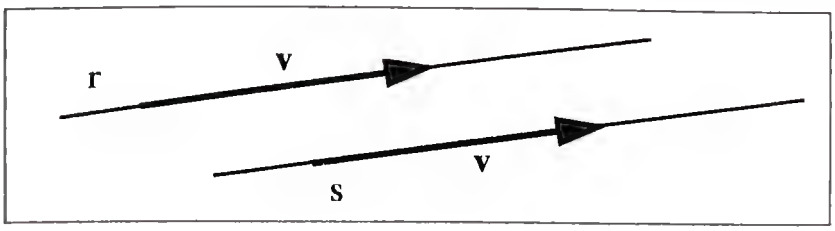
que es una ecuación implícita de la recta r buscada.

16.4 Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Dadas dos rectas r y s del plano, claramente tenemos

Las rectas r y s son paralelas, r ll s, si y sólo si D(r) = D(s).

En la siguiente figura representamos estas rectas



Es inmediato que si r y s son dos rectas paralelas y tienen un punto en común $A \in r \cap s$, entonces r y s coinciden. Dicho en otras palabras, si $r \parallel s$ entonces $(r = s)$ ó $(r \cap s = \varnothing)$.

Supongamos que r es una recta cuya dirección está determinada por el vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Entonces r admitirá una ecuación implícita de la forma $v_2 x - v_1 y + c = 0$, donde $c \in \mathbf{R}$, y toda recta s paralela a r (y por tanto, con la misma dirección que r) admitirá una ecuación implícita de la forma $v_2 x - v_1 y + d = 0$, con $d \in \mathbf{R}$.

16.4.1 Ejemplo

Hallemos la ecuación implícita de la recta s que pasa por el punto A(2, 1) y es paralela a la recta r de ecuación $2x + 3y - 1 = 0$.

La ecuación buscada será de la forma $2x + 3y + k = 0$, con $k \in \mathbf{R}$, que debemos determinar.

Como $A \in s$, entonces $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + k = 0$, luego $k = -7$. Por tanto, la ecuación buscada es

$$s: \ 2x + 3y - 7 = 0.$$

• Obsérvese que hemos escrito $s: \ 2x + 3y - 7 = 0$, para indicar la "recta s cuya ecuación es". En este tema y en el siguiente usaremos esa notación para indicar un objeto geométrico (recta, plano, etc.) que tiene por ecuación la ecuación que siga.

Supongamos ahora que nos dan las ecuaciones implícitas de dos rectas r, s del plano, y deseamos conocer la posición relativa de ambas rectas en el plano.

Si

$$r: a x + b y + c = 0,$$

$$s: a'x + b'y + c' = 0,$$

aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, obtenemos

a) Si el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

es igual a 1, también el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

es 1, porque $(a, b) \neq (0, 0)$ y $(a', b') \neq (0, 0)$, y el sistema

$$ax + by + c = 0,$$

$$a'x + b'y + c' = 0,$$

es compatible indeterminado. Por tanto, $r = s$. En este caso las dos rectas coinciden.

b) Si el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

es uno y el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

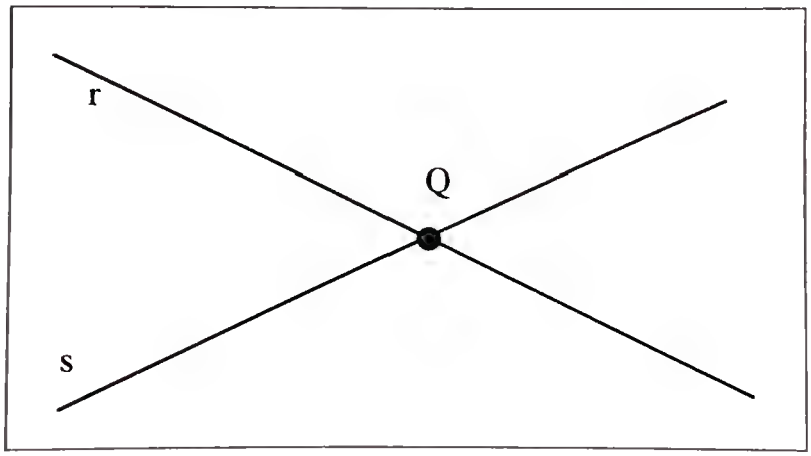
es 2, entonces $r \cap s = \varnothing$. En este caso, las rectas r y s son paralelas y distintas.

c) Si el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

es 2, entonces r y s se cortan en un único punto Q. En este caso, se dice que las rectas r y s son secantes.

En la figura siguiente se representan dos rectas secantes



• En el caso c) las coordenadas del punto Q pueden encontrarse resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a'x + b'y + c' &= 0. \end{aligned}$$

16.4.2 Ejemplo

Las rectas $r: 2x - 3y + 1 = 0$, $s: 4x - 6y + 3 = 0$, son paralelas y distintas, ya que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = 1,$$

y

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 2.$$

16.4.3 Ejemplo

Las rectas $r: 2x + 3y - 5 = 0$, $s: 6x + 9y - 15 = 0$, coinciden ya que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 9 & -15 \end{bmatrix} = 1.$$

16.4.4 Ejemplo

Las rectas $r: x - 2y + 4 = 0$, $s: x - y + 1 = 0$, son secantes, ya que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Resolviendo el sistema:

$$x - 2y + 4 = 0,$$
$$x - y + 1 = 0,$$

obtenemos el punto de intersección $Q(2, 3)$.

16.5 Problemas métricos en el plano

Comenzaremos obteniendo la distancia de dos puntos en el plano. Dados dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ del plano, sabemos que

$$d(A, B) = |\mathbf{v}_{AB}|.$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras, se vió en el tema 13 que

$$|\mathbf{v}_{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos A y B viene dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

16.5.1 Ejemplo

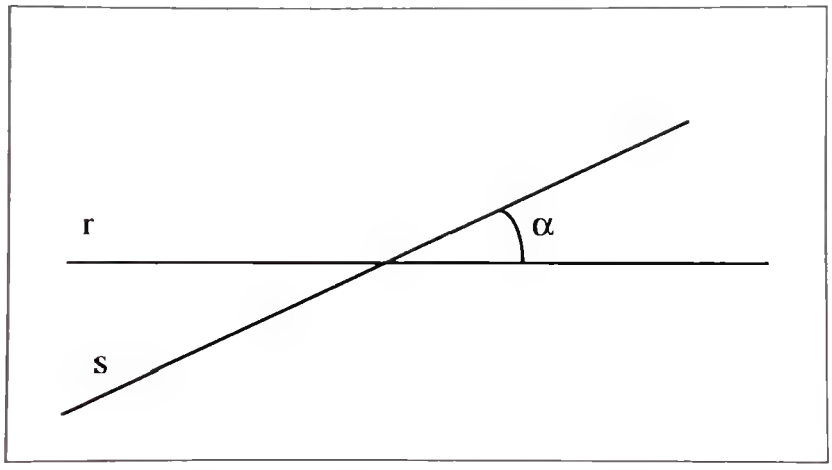
Si $A(-1, 1)$ y $B(3, 4)$, entonces

$$d(A, B) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Dadas dos rectas r y s, definiremos lo que se entiende por ángulo entre ambas.

El ángulo entre r y s es el menor de los ángulos formados por un vector no nulo $\mathbf{u} \in D(r)$ y un vector no nulo $\mathbf{v} \in D(s)$.

En la siguiente figura representamos el ángulo α formado por dos rectas



Supongamos que α es el ángulo formado por las rectas r y s, y que $\mathbf{u} \in D(r)$ y $\mathbf{v} \in D(s)$, con $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Entonces, el valor absoluto del producto escalar $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ es

$$|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

y también

$$|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| = |u_1 v_1 + u_2 v_2|,$$

luego

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

16.5.2 Ejemplo

Para hallar el ángulo que forman las rectas

$$r: 2x + y - 1 = 0,$$

$$s: x - 2y + 4 = 0,$$

tomamos los vectores

$$\mathbf{u} = (-1, 2) \in D(r),$$

y

$$\mathbf{v} = (2, 1) \in D(s).$$

Como $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$, entonces $\cos \alpha = 0$, es decir los dos vectores son ortogonales. Por tanto, las dos rectas r y s son perpendiculares.

En general, dadas las rectas r, s, tenemos que

> r y s son perpendiculares, si y sólo si $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, siendo $\mathbf{u} \in D(r)$ y $\mathbf{v} \in D(s)$ dos vectores no nulos.

Dada una recta $r: a x + b y + c = 0$, sabemos que $\mathbf{u} = (-b, a)$ es un vector no nulo en la dirección de r. Consideremos el vector $\mathbf{n} = (a, b)$. Este vector tiene las dos propiedades siguientes:

- $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$.
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = (-b) \cdot a + a \cdot b = 0$, es decir, $\mathbf{n}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u}$.

Se dice que el vector **n** es un *vector normal* de r, o un *vector característico* de r, y **n** es pues, un vector en la dirección de cualquier recta perpendicular a r.

16.5.3 Ejemplo

Dados el punto A(2, 3) y la recta r de ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = -5t$, entonces el vector $\mathbf{u} = (1, -5)$ es un vector en la dirección de r y $\mathbf{n} = (5, 1)$ es ortogonal a **u**. Por tanto, una ecuación implícita de la recta s que pasa por el punto A y es perpendicular a r es

$$1(x-2) - 5(y-3) = 0,$$

es decir

$$x - 5y + 13 = 0.$$

16.5.4 Ejemplo

Una ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A(1, 0) y es perpendicular a la recta $r: 3x - 2y - 1 = 0$, es

$$2(x-1) + 3(y-0) = 0,$$

es decir

$$2x + 3y - 2 = 0.$$

Dadas las rectas $r: ax + by + c = 0$, y $s: a'x + b'y + c' = 0$, tenemos que son perpendiculares si y sólo si el producto escalar de los vectores $(-b, a)$ y $(-b', a')$ es igual a 0, es decir si y sólo si $aa' + bb' = 0$.

Por consiguiente las rectas r y s son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}' = 0$, siendo **n** y **n'** vectores característicos de r y s,

respectivamente.

16.5.5 Ejemplo

Las rectas $r: x + y - 3 = 0$, y $s: x - y + 1 = 0$, son perpendiculares pues

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}' = 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, (-1) = 0.$$

16.5.6 Ejemplo

El eje X o eje de abscisas es la recta $y = 0$, y el eje Y o eje de ordenadas es la recta $x = 0$. Como sabemos, ambas rectas son perpendiculares, puesto que

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}' = 0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 0.$$

Cerraremos esta Sección estudiando la distancia de un punto a una recta. Dados el punto C y la recta r

La distancia de C a r es el número real

$$d(C, r) = \text{mínimo } \{d(C, P),\ P \in r\}.$$

Es sencillo demostrar que $d(C, r) = d(C, Q)$, siendo Q el punto de corte de la recta r con la recta que pasa por C y es perpendicular a r.

A continuación daremos una fórmula que nos permitirá calcular directamente la distancia de un punto a una recta a partir de las coordenadas del punto y de una ecuación implícita de la recta.

Si $C = (m_1, m_2)$ es un punto del plano y $r : a\,x + b\,y + c = 0$, es una ecuación implícita de una recta del plano, entonces

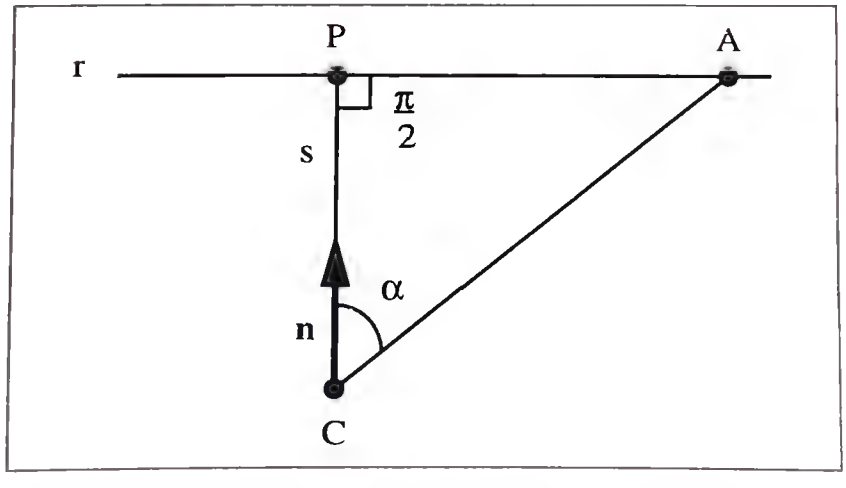
$$d(C, r) = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En efecto, $d(C, r) = d(C, P) = |\mathbf{v}_{CP}|$, siendo P el punto de intersección de r con la recta s que pasa por C y es perpendicular a r.

Sean $A(a_1, a_2)$ un punto arbitrario de r y $\mathbf{n} = (a, b) \in D(s)$. Entonces

$$|\mathbf{v}_{CA} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{v}_{CA}|\,|\mathbf{n}| \cos \alpha,$$

siendo $\alpha \leq \pi/2$, como puede verse en la siguiente figura



Por tanto, $d(C, r) = |\mathbf{v}_{CP}| = |\mathbf{v}_{CA}| \cos \alpha = |\mathbf{v}_{CA} \cdot \mathbf{n}| / |\mathbf{n}| =$

$$\frac{|a(a_1 - m_1) + b(a_2 - m_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|am_1 + bm_2 - (aa_1 + ba_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ahora bien, como $A \in r$, $a\,a_1 + b\,a_2 + c = 0$, luego

$$a\,a_1 + b\,a_2 = -\,c.$$

Por consiguiente

$$d\,(C, r) = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

16.5.7 Ejemplo

La distancia del punto $C(3, -1)$ a la recta $r : 2x + 5y + 1 = 0$ es

$$d\,(C, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

16.5.8 Ejemplo

La distancia del origen $O(0, 0)$ a la recta $r : 3x + 4y - 5 = 0$, es

$$d\,(O, r) = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

16.6 Nociones sobre la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola

Recordemos que la circunferencia de centro $C \in E_2$ y radio $r > 0$, es el conjunto de los puntos $P \in E_2$ tales que $d(C, P) = r$, es decir, tales que

$(d(C, P))^2 = r^2$.

Por tanto, si C es el punto de coordenadas (a, b), la circunferencia de centro C y radio r es el conjunto de los puntos P(x,y) que satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

En particular, una ecuación de la circunferencia de centro O, origen de coordenadas, y radio r, es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La circunferencia unidad del plano es la de centro O y radio r = 1. Una ecuación de la circunferencia unidad es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

16.6.1 Ejemplo

Hallaremos una ecuación de la circunferencia de centro el punto C(2, - 1) y radio 4.

Solución

Por lo anterior,

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16,$$

es una ecuación de la circunferencia dada. Desarrollando los cuadrados y operando, obtenemos la ecuación equivalente:

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0.$$

Existen otros conjuntos o lugares geométricos de puntos que surgen frecuentemente en la Geometría Plana. Entre ellos, cabe destacar la elipse, la hipérbola y la parábola.

Sean F y F' dos puntos distintos del plano.

Se llama *elipse* al conjunto de puntos P del plano cuya suma de distancias a F y F' es constante, siendo esta constante un número $2a > d(F, F')$. Los puntos F y F' reciben el nombre de *focos de la elipse.*

Sean $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ y $a > c > 0$. Consideremos la elipse

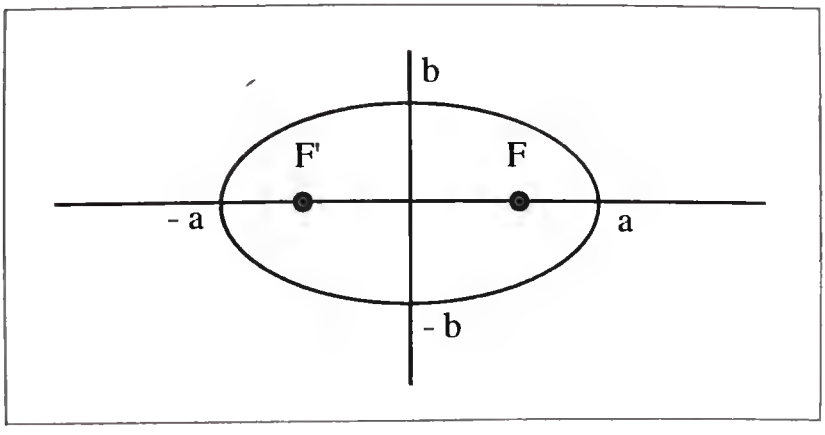
$$\{P \in E_2,\ d(P, F) + d(P, F') = 2a\},$$

entonces se demuestra, aunque no lo haremos aquí, que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siendo $b^2 = a^2 - c^2$.

En la figura siguiente se da una representación gráfica de una elipse de focos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.



16.6.2 Ejemplo

Sean F(4, 0) y F'(- 4, 0) los focos de una elipse, y sea a = 5. Hallemos una ecuación de esta elipse.

Solución

Como c = 4, se sigue que $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. Por tanto, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Sean F y F' dos puntos distintos del plano.

Se llama *hipérbola* al conjunto de puntos P del plano cuya diferencia de distancias a F y F' es, en valor absoluto, constante, siendo esta constante un número $0 < 2a < d(F, F')$. Los puntos F y F' reciben el nombre de *focos de la hipérbola.*

Sean F(c, 0), F'(- c, 0) y $0 < a < c$. Consideremos la hipérbola

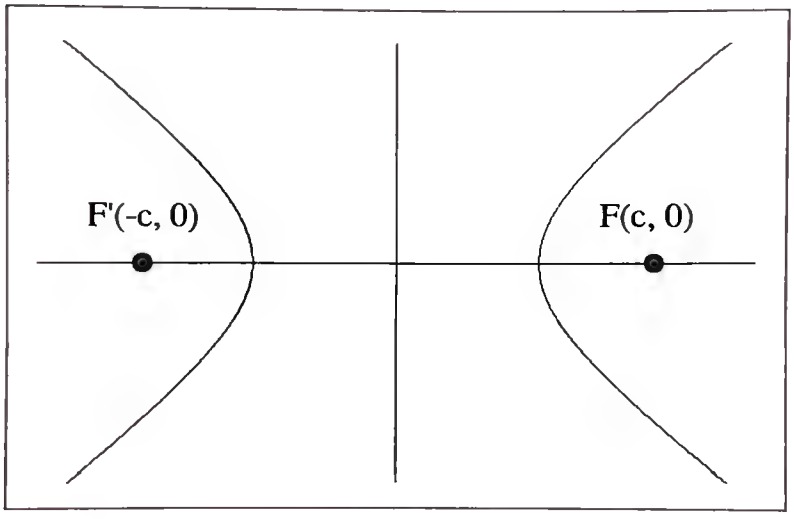
$$\{P \in E_2,\ |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\},$$

entonces se demuestra, aunque no lo haremos aquí, que una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siendo $b^2 = c^2 - a^2$.

En la figura siguiente representamos una hipérbola con focos F(c, 0) y F'(- c, 0).



16.6.3 Ejemplo

Hallemos los focos de la hipérbola de ecuación

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Solución

En este caso tenemos que $a^2 = 1, b^2 = 4$, luego $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$, es decir, $c = \sqrt{5}$.

Por tanto los focos de la hipérbola dada son los puntos

$$F(\sqrt{5}, 0), \quad F'(-\sqrt{5}, 0).$$

16.6 Nociones sobre la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola

Sean un punto F y una recta r de E_2, con $F \notin r$.

Se llama *parábola de foco* F *y directriz* r al conjunto de puntos P de E_2 tales que sus distancias al punto F y a la recta r son iguales.

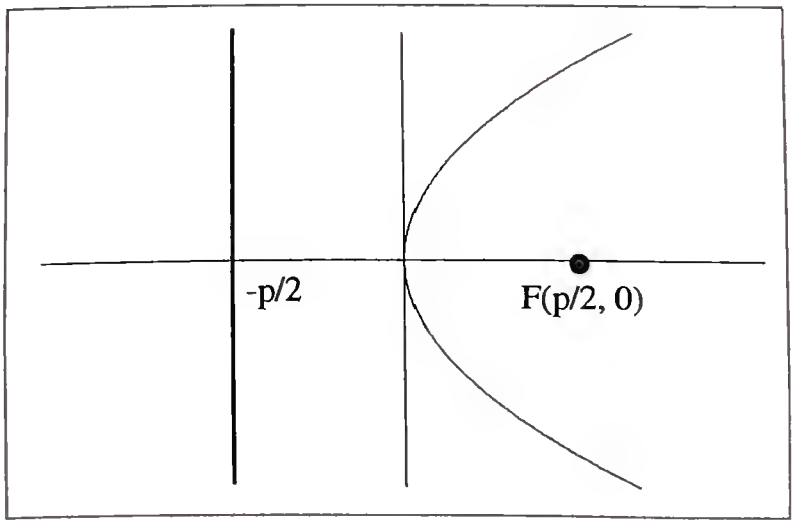
Sean F el punto de coordenadas (p/2, 0) y r la recta de ecuación $x = -p/2$. Dada la parábola de foco F y directriz r

$$\{P \in E_2,\ d(P, F) = d(P, r)\},$$

es fácil demostrar que una ecuación de esta parábola es

$$y^2 = 2px.$$

En la figura siguiente, representamos una parábola de foco F(p/2, 0) y directriz r : $x = -p/2$.



Se observa que la parábola de ecuación $y^2 = 2\,p\,x$, es simétrica respecto del eje de abscisas ($y = 0$). Además, el origen de coordenadas es un punto situado sobre la parábola.

16.6.4 Ejemplo

Hallemos una ecuación de la parábola de foco $F(p/2, 0)$ y directriz $r : x = -p/2$, sabiendo que el punto $A(2, 4)$ pertenece a dicha parábola.

Solución

Una ecuación de esa parábola es $y^2 = 2\,p\,x$. Como $A(2, 4)$ pertenece a la parábola, se cumple que $4^2 = 2\,p\,2 = 4\,p$. Luego $p = 4$. Deducimos que la ecuación buscada para la parábola es

$$y^2 = 8\,x.$$

Además, el foco de la parábola es $F(2, 0)$ y la directriz es la recta r de ecuación $x = -2$.

16.7 Ejercicios

1.- Sea r la recta con ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 - 2t$$
$$y = 2 + t$$

a) Determínense dos puntos en la recta y un vector de dirección.

b) Hállese una ecuación implícita de r.

2.- Para cada una de las ecuaciones siguientes, probar que se trata de la ecuación de una circunferencia y obtener su centro y su radio:

$$x^2 + y^2 - 6\,x - 2\,y + 6 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0.$$

3.- Calcúlese la distancia entre el punto P(1,3) y la recta r de ecuación $-2x + y - 5 = 0$.

4.- Dados dos puntos distintos A, B $\in E_2$, se llama mediatriz del segmento de extremos A y B, a la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a la recta que contiene a esos puntos. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(1, 3) y B(5, 7).

b) Hallar una ecuación del conjunto de los puntos $P \in E_2$ tales que d(P, A) = d(P, B), siendo A y B los puntos del apartado a). Comparar con el resultado del apartado a).

5.- Si la ecuación de una recta se puede escribir en la forma $y = mx + b$, con m, b $\in \mathbf{R}$, entonces se dice que m es la pendiente de dicha recta.

a) Hallar las pendientes de las rectas siguientes:

$$3x + 2y - 8 = 0,$$

$$x = 3/5 - 2/3\,t, \quad y = 1/5 + 1/3\,t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x/2 + y/5 = 1,$$

$$(x - 3)/2 = (y - 4)/3.$$

b) Interpretar gráficamente la pendiente de una recta.

c) Demostrar que dos rectas (que no admiten ecuación de la forma $x + a = 0$) son paralelas si y sólo si sus pendientes coinciden.

d) Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, - 1) y tiene pendiente 3/2.

e) Obtener la relación existente entre las pendientes de dos rectas perpendiculares.

f) Utilizando el apartado e), hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(4, -6) y es perpendicular a la recta $y = 2x + 1$.

TEMA 17

Geometría analítica del espacio

En este tema presentamos los fundamentos de la Geometría Analítica del Espacio. Nos centraremos de modo preferente en el estudio de los puntos, las rectas y los planos en el espacio (tridimensional).

Como en el caso de la Geometría Analítica del Plano, a cada figura tal como una recta o un plano del espacio podemos asociarle una ecuación o sistema de ecuaciones lineales. De esta forma, el estudio de las propiedades geométricas de tales figuras se puede reducir al estudio de las propiedades algebraicas de sus ecuaciones correspondientes. Dicho en otras palabras, se trata de preparar el terreno para poder utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

17.1 Puntos, rectas y planos en el espacio

Representaremos mediante E_3 el conjunto de todos los puntos del espacio.

$$E_3 = \{P, P \text{ es un punto del espacio}\}.$$

Por otra parte, representaremos mediante V_3 el conjunto de todos los vectores libres del espacio.

A cada par ordenado (P, Q) de puntos del espacio le hacemos corresponder el vector libre $\mathbf{v}_{PQ}$, uno de cuyos representantes es el

vector fijo PQ con origen P y extremo Q.

Como en el caso del plano, se satisfacen las siguientes propiedades:

- Dados un punto $P \in E_3$ y un vector libre $\mathbf{v} \in V_3$, existe un punto $Q \in E_3$ tal que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{PQ}.$$

Además, este punto Q es único.

- $\mathbf{v}_{PQ} = \mathbf{0}$, el vector cero, si y sólo si $P = Q$.

- $\mathbf{v}_{PQ} + \mathbf{v}_{QR} = \mathbf{v}_{PR}$, cualesquiera que sean P, Q y R.

Decimos que hemos fijado un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio cuando hemos elegido un punto $O \in E_3$ y una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en V_3. En este caso, para cada punto P, el vector $\mathbf{v}_{OP}$ se puede escribir de manera única como combinación lineal

$$\mathbf{v}_{OP} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3,$$

siendo $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, que recibe el nombre de coordenadas cartesianas del punto P. En forma abreviada escribiremos P(x, y, z), si P es el punto de coordenadas cartesianas (x, y, z).

El punto O se llama origen de coordenadas, y sus coordenadas son (0, 0, 0), puesto que $\mathbf{v}_{OO} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2 + 0\,\mathbf{e}_3$.

Si $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, escribiremos abreviadamente $\mathbf{v} = (x, y, z)$. Recordemos que si $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\mathbf{v}_{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

La recta r del espacio determinada por un punto A de E_3 y un vector no nulo $\mathbf{v} \in V_3$ es el conjunto de puntos:

$$r = \{P \in E_3, \mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}, t \in \mathbf{R}\}.$$

La dirección de la recta r en el espacio es el conjunto de vectores de V_3:

$$D(r) = \{t\,\mathbf{v}, t \in \mathbf{R}\}.$$

Si pasamos de un vector no nulo a dos vectores no nulos situados en direcciones distintas, entonces obtenemos el concepto de plano en E_3.

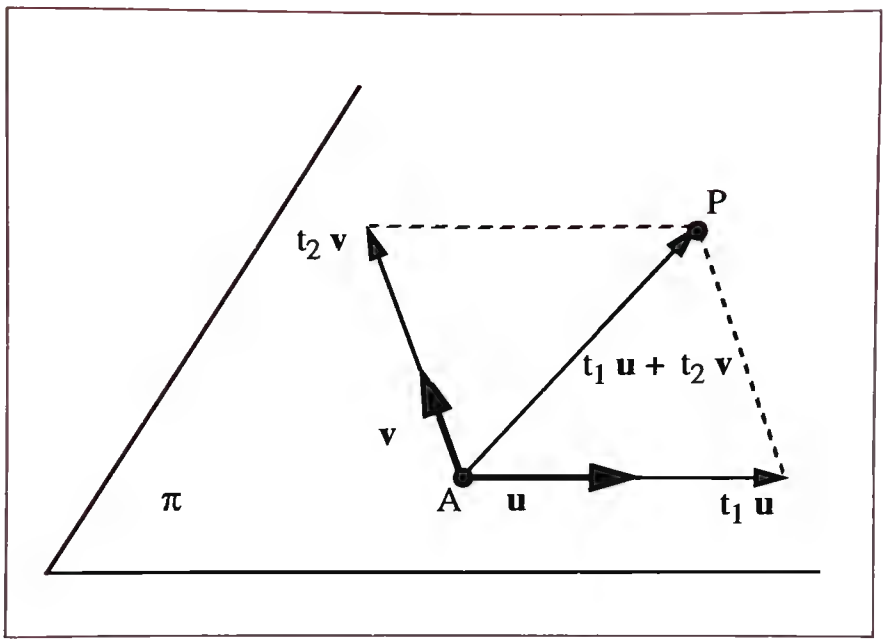
Dados un punto A y dos vectores linealmente independientes, **u** y **v**, el plano π de E_3 determinado por el punto A y los vectores **u** y **v** es el conjunto de puntos:

$$\pi = \{P \in E_3,\ \mathbf{v}_{AP} = t_1\,\mathbf{u} + t_2\,\mathbf{v},\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}.$$

La dirección del plano π es el conjunto de vectores:

$$D(\pi) = \{t_1\,\mathbf{u} + t_2\,\mathbf{v},\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}.$$

En la próxima figura representamos el plano π determinado por un punto A y dos vectores **u** y **v** (linealmente independientes).



Un punto P es *incidente* con π si $P \in \pi$, es decir, si $\mathbf{v}_{AP} = t_1\,\mathbf{u} + t_2\,\mathbf{v}$, con $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

Una recta r de E_3 es incidente con el plano π si r está contenida en π, es decir, si $P \in r \Rightarrow P \in \pi$.

Si r es la recta de E_3 determinada por el punto B y el vector $\mathbf{w} \in V_3$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, y π es el plano determinado por el punto A y los vectores **u** y **v** (linealmente independientes), entonces r es incidente con π si y sólo si B es un punto del plano π y el vector **w** pertenece al conjunto $D(\pi)$, es decir, si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

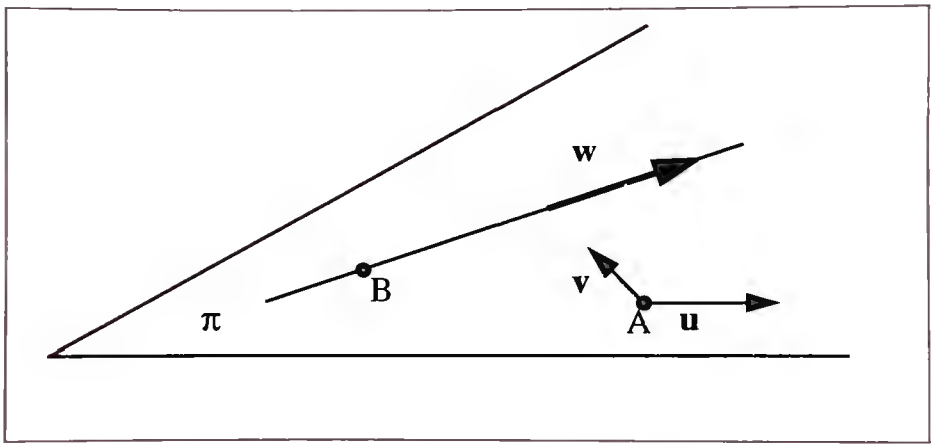
$$\mathbf{v}_{AB} = s_1\,\mathbf{u} + s_2\,\mathbf{v}, \quad \text{con } s_1, s_2 \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{w} = t_1\,\mathbf{u} + t_2\,\mathbf{v}, \quad \text{con } t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Como consecuencia, se desprende la siguiente afirmación:

Si r es una recta incidente con el plano π entonces D(r) está contenido en D(π).

En la figura siguiente representamos una recta r incidente con el plano π.



Diremos que los tres puntos A, B y C de E_3 están *alineados* si existe una recta r que los contiene, es decir si A, B, C $\in$ r.

Sean A, B y C tres puntos no alineados. Consideremos los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{AB}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{AC}$. Es fácil comprobar que **v** y **w** son linealmente independientes. En consecuencia, tiene sentido hablar del plano π determinado por el punto A y los vectores **v** y **w**. Es inmediato que:

a) Los puntos A, B y C pertenecen al plano π.

b) Este plano π es el único plano que contiene a esos tres puntos.

Por las condiciones a) y b), el plano π recibe el nombre de plano que pasa por esos tres puntos.

17.1.1 Ejemplo

Sean O el origen, P(1, 0, 1) y Q(2, 1, -1), tres puntos de E_3. Entonces la dirección del plano π que pasa por estos tres puntos podemos determinarla por los vectores $\mathbf{v}_{OP} = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_{OQ} = (2, 1, -1)$. Por tanto

$$D(\pi) = \{t_1 \mathbf{v}_{OP} + t_2 \mathbf{v}_{OQ},\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}\} = \{(t_1 + 2t_2, t_2, t_1 - t_2),\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}.$$

17.2 Ecuaciones de un plano en el espacio

Sea π el plano determinado por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y los vectores linealmente independientes $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Si P(x, y, z) es un punto del espacio, entonces $P \in \pi$ si y sólo si existen $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, tales que

$$\mathbf{v}_{AP} = t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v},$$

es decir, si y sólo si

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = (t_1 u_1 + t_2 v_1,\ t_1 u_2 + t_2 v_2,\ t_1 u_3 + t_2 v_3).$$

Esta condición puede expresarse también en la forma

$$x - a_1 = t_1 u_1 + t_2 v_1,$$

$$y - a_2 = t_1 u_2 + t_2 v_2,$$

$$z - a_3 = t_1 u_3 + t_2 v_3,$$

o en la forma equivalente:

$$x = a_1 + t_1\, u_1 + t_2\, v_1,$$

$$y = a_2 + t_1\, u_2 + t_2\, v_2,$$

$$z = a_3 + t_1\, u_3 + t_2\, v_3.$$

Se dice que las ecuaciones anteriores son unas *ecuaciones paramétricas* del plano π. En este caso, los parámetros son t_1 y t_2. Obsérvese que para cada par $(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$ obtenemos un punto del plano π.

17.2.1 Ejemplo

Unas ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto $A(3, 2, 1)$ y tiene la dirección determinada por los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 4, -1)$ son

$$x = 3 + t_1,$$

$$y = 2 - t_1 + 4\, t_2,$$

$$z = 1 + t_1 - t_2.$$

Otra forma equivalente de expresar la condición de que el punto $P(x, y, z)$ es incidente con el plano π es la siguiente:

> $P \in \pi$ si y sólo si el vector $\mathbf{v}_{AP}$ depende linealmente de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Es decir, si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Sea $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Como vimos en el tema 15:

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Entonces, $P \in \pi$ si y sólo si

$$n_1 (x - a_1) + n_2 (y - a_2) + n_3 (z - a_3) = 0,$$

como se obtiene desarrollando el determinante (*) por la primera fila.

Además, como los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes, el vector $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$.

Se dice que el vector $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un *vector característico* del plano π. Este vector es, como sabemos, ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, y por tanto, es ortogonal a cada vector $t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}$ en la dirección de π.

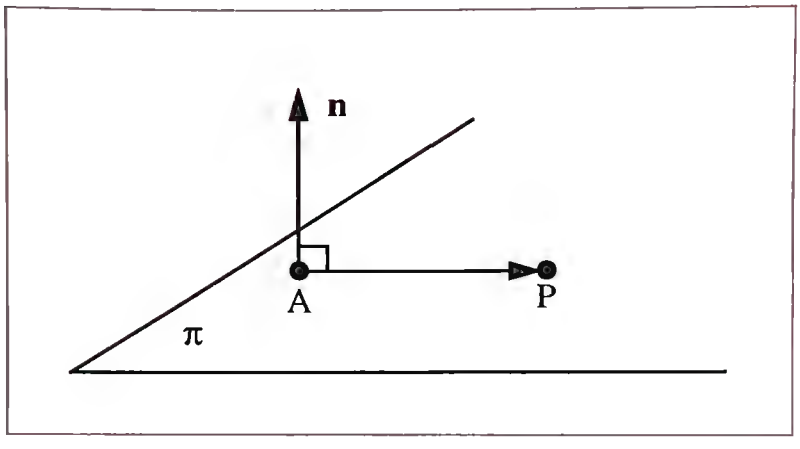
Podemos expresar el plano π en función del punto A y del vector $\mathbf{n}$ como sigue

$$\pi = \{P(x, y, z) \in E_3, n_1 (x - a_1) + n_2 (y - a_2) + n_3 (z - a_3) = 0\},$$

o, equivalentemente

$$\pi = \{P \in E_3, \mathbf{n} \bullet \mathbf{v}_{AP} = 0\},$$

como muestra la siguiente figura



La ecuación $n_1 (x - a_1) + n_2 (y - a_2) + n_3 (z - a_3) = 0$ se puede escribir en la forma

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + n_0 = 0,$$

con $n_0 = -(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3)$, que recibe el nombre de *ecuación implícita* o *cartesiana* del plano π.

17.2.2 Ejemplo

Hallemos una ecuación implícita del plano determinado por el punto A(2, 1, 0) y los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$.

Solución

El vector

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, 1, 2),$$

es un vector característico del plano π.

Por tanto,

$$\pi: -3(x-2)+(y-1)+2(z-0)=0,$$

es decir,

$$\pi: -3x+y+2z+5=0.$$

17.3 Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Decimos que dos planos π y ρ son *paralelos* si tienen la misma dirección: $D(\pi) = D(\rho)$.

Es fácil demostrar el siguiente resultado:

Si dos planos π y ρ son paralelos entonces $(\pi = \rho)$ ó $(\pi \cap \rho = \varnothing)$.

Sean dos planos π y ρ en el espacio, $\mathbf{n}$ un vector característico de π, y $\mathbf{n}'$ un vector característico de ρ. Entonces π y ρ son paralelos si y sólo si $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ son linealmente dependientes.

En consecuencia si π y ρ son dos planos paralelos, entonces existe un vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, que es un vector característico de π y ρ.

Por tanto, π y ρ admiten ecuaciones implícitas de la forma:

$$\pi: n_1 x + n_2 y + n_3 z + n_0 = 0,$$

$$\rho: n_1 x + n_2 y + n_3 z + n'_0 = 0.$$

Supongamos que tenemos dos planos π y ρ dados por sus ecuaciones implícitas. Deseamos conocer la posición relativa que ocupan ambos planos en el espacio.

Sean

$$\pi : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \qquad \rho : a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0,$$

y sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, se pueden presentar las siguientes posibilidades:

a) El rango de B es 1. Entonces el rango de A también es 1, porque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ y por tanto el sistema

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \qquad a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0, \qquad (*)$$

es compatible indeterminado. En este caso, $\pi = \rho$, es decir, los dos planos coinciden.

b) El rango de A es 1 y el rango de B es 2. Entonces los planos π y ρ son paralelos, ya que el sistema (*) es incompatible. En este caso, decimos que los planos π y ρ son paralelos distintos.

c) El rango de A es 2. Entonces el rango de B también es 2, luego el sistema (*) es compatible y tiene infinitas soluciones. En este caso decimos que los planos π y ρ son secantes.

17.3.1 Ejemplo

Estudiemos la posición relativa de los planos $\pi : 3\,x + 2\,y - z - 1 = 0$, $\rho : -6\,x - 4\,y + 2\,z + 2 = 0$.

Solución

Como el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

es 1, estamos en el caso a) visto anteriormente. Por tanto, los dos planos coinciden.

17.3.2 Ejemplo

Los planos $\pi : x + 2y - 3z = 0$ y $\rho : -3x - 6y + 9z + 1 = 0$, son dos planos paralelos distintos, puesto que, en este caso, el rango de la matriz A es 1 y el de la matriz B es 2.

17.3.3 Ejemplo

Los planos $\pi : x - 2y + 3z = 0$ y $\rho : 2x + y - z + 4 = 0$, son secantes, ya que el rango de la matriz A, en este caso, es 2.

Sean π y ρ dos planos secantes, $\mathbf{n}$ un vector característico de π y $\mathbf{m}$ un vector característico de ρ. Entonces, al ser π y ρ no paralelos, sabemos que los vectores $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}$ son linealmente independientes, luego el producto vectorial $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ es distinto del vector $\mathbf{0}$, como vimos en el tema 15. Sabemos también (véase el caso c) de la discusión del sistema (*)) que el conjunto $\pi \cap \rho$ tiene infinitos puntos. Sea $A \in \pi \cap \rho$. Entonces,

$$\pi = \{P \in E_3, \mathbf{n} \bullet \mathbf{v}_{AP} = 0\}, \quad \rho = \{P \in E_3, \mathbf{m} \bullet \mathbf{v}_{AP} = 0\}.$$

Por tanto, $P \in \pi \cap \rho$ si y sólo si $\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}_{AP} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{v}_{AP} = 0$. Es decir, si y sólo si existe un número real t tal que $\mathbf{v}_{AP} = t\,(\mathbf{n} \times \mathbf{m})$, puesto que los vectores de esta forma son precisamente los vectores que son simultáneamente ortogonales a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$.

Hemos demostrado así la siguiente afirmación:

Si π y ρ son dos planos secantes, entonces $\pi \cap \rho$ es una recta del espacio.

Además, si

$$\pi = \{P \in E_3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{AP} = 0\}$$

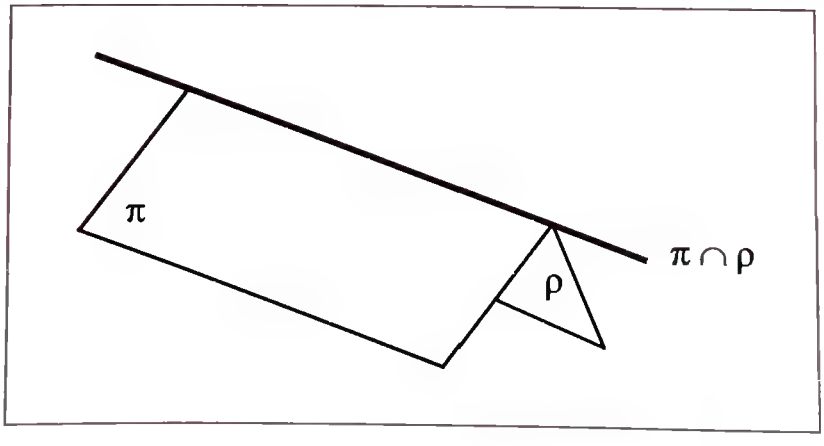
y

$$\rho = \{P \in E_3, \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{AP} = 0\},$$

se sigue que

$$\pi \cap \rho = \{P \in E_3, \mathbf{v}_{AP} = t(\mathbf{n} \times \mathbf{m}), t \in \mathbf{R}\}.$$

La siguiente figura ilustra gráficamente esta situación.



17.4 Ecuaciones de una recta en el espacio

Sea r la recta del espacio determinada por un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y un

vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Entonces $P(x, y, z) \in r$ si y sólo si $\mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}$, con $t \in \mathbf{R}$, es decir si y sólo si $(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = t\,(v_1, v_2, v_3)$, o en forma equivalente

$$x = a_1 + t\,v_1,$$

$$y = a_2 + t\,v_2,$$

$$z = a_3 + t\,v_3.$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones paramétricas* de r.

17.4.1 Ejemplo

Unas ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por el punto $A(1, 2, 1)$ y el vector $\mathbf{v} = (-1, 4, 2)$ son

$$x = 1 - t,$$

$$y = 2 + 4\,t,$$

$$z = 1 + 2\,t.$$

Si tenemos dos puntos distintos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, entonces el vector $\mathbf{v}_{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \neq (0, 0, 0)$. Por consiguiente tiene sentido hablar de la recta r determinada por el punto A y el vector $\mathbf{v}_{AB}$. Unas ecuaciones paramétricas de r son

$$x = a_1 + (b_1 - a_1)\,t,$$

$$y = a_2 + (b_2 - a_2)\,t,$$

$$z = a_3 + (b_3 - a_3)\, t.$$

Como en el caso de la Geometría Plana, es fácil comprobar que esta recta r contiene a los puntos A y B. Además, r es la única recta del espacio que pasa por los puntos A y B.

17.4.2 Ejemplo

Dados los puntos A(1, 1, 1) y B(2, - 1, 2), entonces $\mathbf{v}_{AB} = (1, -2, 1)$, y unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B son, por consiguiente,

$$x = 1 + t,$$

$$y = 1 - 2t,$$

$$z = 1 + t.$$

Supongamos que

$$\pi : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \qquad \rho : a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0,$$

son unas ecuaciones implícitas de dos planos secantes. Entonces $\pi \cap \rho$ es una recta r. Además, $P(x, y, z) \in r$ si y sólamente si

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0,$$

$$a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0.$$

Por este motivo, se dice que el sistema anterior son unas *ecuaciones implícitas* o *cartesianas* de la recta r.

Para pasar de las ecuaciones implícitas anteriores, con el rango de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix},$$

igual a 2, a unas ecuaciones paramétricas de la misma recta, es necesario resolver el sistema anterior, o bien proceder como en el ejemplo siguiente:

17.4.3 Ejemplo

Los planos $\pi : x + y + z - 2 = 0$ y $\rho : x - y + z = 0$, son secantes. Por tanto, sabemos que su intersección es una recta r. Para obtener un punto de r hacemos, por ejemplo, $z = 0$ en las ecuaciones de los dos planos. Entonces tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ x - y &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $x = 1, y = 1$. Por tanto, $A(1, 1, 0) \in r$. Además, el vector $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ es un vector característico de π y $\mathbf{m} = (1, -1, 1)$ es un vector característico de ρ. Calculemos su producto vectorial:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{m} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (2, 0, -2).$$

Por consiguiente, unas ecuaciones paramétricas de la recta r son

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= 1, \\ z &= -2t. \end{aligned}$$

17.5 Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Dados una recta r y un plano π en el espacio, decimos que r es paralela a π si la dirección de r está contenida en la dirección de π.

Es fácil probar el siguiente resultado:

> Si una recta r es paralela a un plano π entonces $(\pi \supset r)$ ó $(r \cap \pi = \varnothing)$.

Dados una recta $r = \{P \in E_3, \mathbf{v}_{BP} = t\,\mathbf{w}, t \in \mathbf{R}\}$ y un plano π, pueden darse tres casos distintos:

a) $\mathbf{w} \in D(\pi)$ y $B \in \pi$. Entonces r es paralela a π y como $B \in r \cap \pi$, entonces la recta está contenida en el plano, es decir r es incidente con π.

b) $\mathbf{w} \in D(\pi)$ y $B \notin \pi$. Entonces r es paralela a π y como r no está contenida en π, es no incidente con π.

c) $\mathbf{w} \notin D(\pi)$. Entonces r no es paralela a π. En este caso, se dice que la recta y el plano son secantes.

17.5.1 Ejemplo

Sean la recta r:

$$x = t,$$

$$y = 1 - t,$$

$$z = -t,$$

y el plano $\pi: 2x + y + z - 1 = 0$.

Si sustituimos las ecuaciones de r en la ecuación de π obtenemos la identidad $0 = 0$, que se cumple para todo $t \in \mathbf{R}$. Por tanto la recta es

incidente con el plano.

17.5.2 Ejemplo

Sean la recta r:

$$x = 3 + t,$$

$$y = 2 + 2t,$$

$$z = 1 + t,$$

y el plano $\pi : x - y + z + 1 = 0$.

Sustituyendo las ecuaciones de r en la ecuación de π obtenemos $3 = 0$. Esto nos dice que $r \cap \pi = \varnothing$. El vector $\mathbf{w} = (1, 2, 1) \in D(r)$ y el vector $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ es un vector característico de π. Como

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{w} = 1 - 2 + 1 = 0,$$

se deduce que $\mathbf{w} \in D(\pi)$, luego r es paralela a π y no incidente con π.

17.5.3 Ejemplo

Sean la recta r:

$$x = t,$$

$$y = t,$$

$$z = t,$$

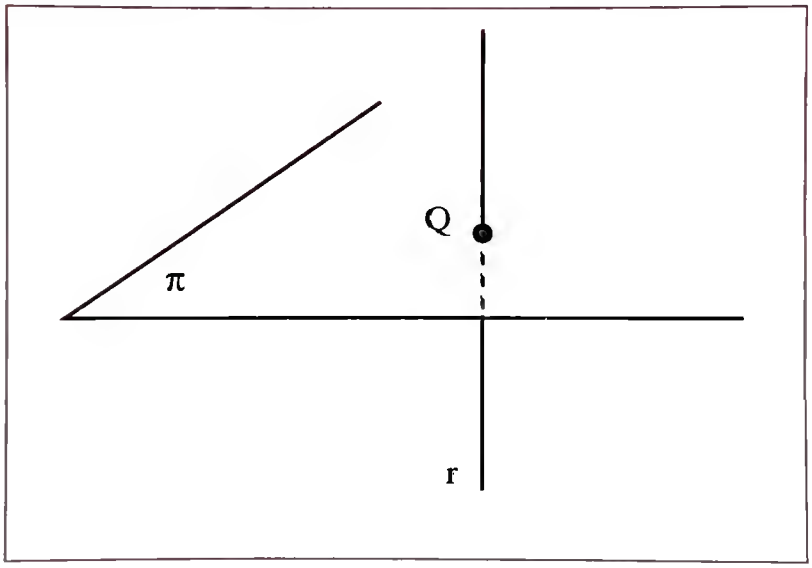
y el plano $\pi : x + y + z - 3 = 0$.

Si sustituimos las ecuaciones de r en la de π obtenemos $3t - 3 = 0$, es decir, $t = 1$. Por tanto, la recta y el plano son secantes. Además, $r \cap \pi$ es el punto $Q(1, 1, 1)$.

En general, se puede demostrar el siguiente resultado:

Sean r y π una recta y un plano secantes. Entonces existe un punto $Q \in E_3$ tal que $r \cap \pi = \{Q\}$.

La siguiente figura ilustra la situación anterior



17.6 Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Dos rectas r y s son *paralelas* si $D(r) = D(s)$.

Se puede demostrar que

Si dos rectas r y s son paralelas entonces $(r = s)$ ó $(r \cap s = \varnothing)$.

Sean

$$r = \{P \in E_3, \mathbf{v}_{AP} = t\,\mathbf{v}, t \in \mathbf{R}\}, \quad s = \{P \in E_3, \mathbf{v}_{BP} = t\,\mathbf{w}, t \in \mathbf{R}\},$$

dos rectas del espacio. Entonces r y s son paralelas si y sólo si $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente dependientes.

Supongamos ahora que r y s son paralelas. Entonces $r = s$ si y sólo si $\mathbf{v}_{AB} \in D(r) = D(s)$, es decir, si y sólo si $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_{AB}\}$ son linealmente dependientes.

Supongamos que r y s no son paralelas. Entonces $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes. Pueden ocurrir dos casos:

a) Si existe un punto $Q \in r \cap s$, entonces r y s están contenidas en un plano π, que es el plano $\{P \in E_3, \mathbf{v}_{QP} = t_1\,\mathbf{v} + t_2\,\mathbf{w}, t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}$.

En este caso, $\mathbf{v}_{AB} \in D(\pi) = \{t_1\,\mathbf{v} + t_2\,\mathbf{w}, t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}$, por tanto los vectores $\{\mathbf{v}_{AB}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente dependientes.

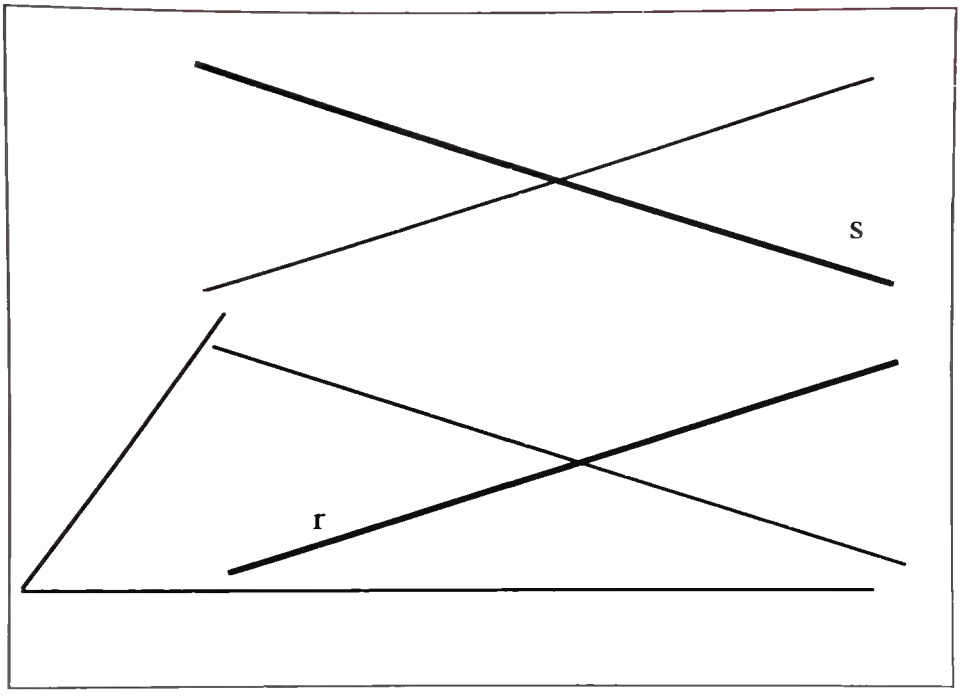
Decimos en este caso que las rectas r y s son secantes.

b) Si r y s no se cortan, entonces no existe ningún plano π que contenga a ambas rectas.

En este caso, $\mathbf{v}_{AB} \notin \{t_1\,\mathbf{v} + t_2\,\mathbf{w}, t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}$, por tanto $\{\mathbf{v}_{AB}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes.

Decimos en este caso que las rectas r y s se cruzan, como muestra la próxima figura.

17.6 Posiciones relativas de dos rectas en el espacio



Diremos que dos rectas son *coplanarias* si existe un plano que contiene a ambas.

De la definición anterior se deduce inmediatamente:

Dos rectas son coplanarias si y sólo si son paralelas o se cortan.

Y, por tanto,

Dos rectas se cruzan, si y sólo si no son coplanarias.

17.6.1 Ejemplo

Sean las rectas dadas por las ecuaciones paramétricas:

$$r: \; x = 1 + 2t, \; y = 1, \; z = 1 + t,$$

$$s: \; x = 3 + 4t, \; y = 1, \; z = 2 + 2t,$$

entonces A es el punto (1, 1, 1), B(3, 1, 2), $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ y $\mathbf{w} = (4, 0, 2)$.

Como $\mathbf{w} = 2\,\mathbf{v}$, las dos rectas r y s son paralelas. Además, $\mathbf{v}_{AB} = (2, 0, 1) \in D(r) = D(s)$, luego $r = s$.

17.6.2 Ejemplo

Sean las rectas

$$r: \; x = t, \; y = t, \; z = t,$$

$$s: \; x = 2 + 3t, \; y = 1 + 3t, \; z = 1 + 3t,$$

entonces A es el punto (0, 0, 0), $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, B el punto (2, 1, 1) y $\mathbf{w}$ es el vector (3, 3, 3). Observamos que $\mathbf{w} = 3\,\mathbf{v}$, por lo que r y s son rectas paralelas. Además $\mathbf{v}_{AB} = (2, 1, 1) \notin D(r) = D(s)$, luego r y s son paralelas no coincidentes.

17.6.3 Ejemplo

Sean las rectas:

$$r: \; x = 2t, \; y = 0, \; z = t,$$

$$s: \; x = 3 + t, \; y = 1 + t, \; z = 2 + t,$$

entonces A es el punto (0, 0, 0), $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, B el punto (3, 1, 2) y $\mathbf{w}$ el vector (1, 1, 1). Como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes, r y s no son paralelas. Además $\mathbf{v}_{AB} = (3, 1, 2) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, luego r y s son

secantes. Precisamente r y s se cortan en el punto Q(2, 0, 1). En efecto, si en las ecuaciones de s hacemos $y = 0$, obtenemos $t = -1$, lo que proporciona $x = 3 - 1 = 2$, $y = 0$, $z = 2 - 1 = 1$.

17.6.4 Ejemplo

Sean las rectas:

$$r: \quad x = 3 + t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 1 + t,$$

$$s: \quad x = 3 + t, \quad y = 5 - t, \quad z = 2 + t,$$

entonces A es el punto (3, 2, 1), $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$, B el punto (3, 5, 2) y $\mathbf{w}$ el vector (1, - 1, 1). Como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes, r y s no son paralelas. Además $\mathbf{v}_{AB} = (0, 3, 1)$. Los vectores $\{\mathbf{v}_{AB}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes, como se puede comprobar fácilmente. Por consiguiente, las rectas r y s se cruzan.

17.7 Problemas métricos en el espacio

Comenzaremos obteniendo la distancia de dos puntos en el espacio. Ya sabemos que la distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector $\mathbf{v}_{AB}$. Por tanto, si $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ son dos puntos del espacio se tiene que

$$d(A, B) = |\mathbf{v}_{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

17.7.1 Ejemplo

La distancia entre los puntos A(3, 1, 2) y B(4, - 1, 3) es

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{6}.$$

Dadas dos rectas r y s, el ángulo que forman es el menor de los ángulos formados por dos vectores no nulos, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} \in D(r)$ y $\mathbf{v} \in D(s)$.

Por tanto, si α es el ángulo formado por r y s, tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

siendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in D(r)$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in D(s)$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

17.7.2 Ejemplo

Dadas las rectas:

$$r: \quad x = 3 + t, \quad y = 2, \quad z = 6 - t,$$

$$s: \quad x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 1,$$

entonces $\mathbf{u} = (1, 0, -1) \in D(r)$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2}$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0) \in D(s)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$. Claramente, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1$. Por tanto $\cos\alpha = 1/2$. Se deduce que las rectas forman un ángulo de $\pi/3$ radianes, o bien, 60°.

Las rectas r y s son perpendiculares si y sólo si el ángulo α que forman es $\pi/2$ radianes, es decir, si y sólo si $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, lo que ocurre cuando y sólo cuando los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

17.7.3 Ejemplo

Las rectas:

$$r: \quad x = 1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 + t,$$

$$s: \quad x = 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2 - t,$$

son perpendiculares, ya que podemos tomar los vectores de dirección $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$, que son ortogonales:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Una recta r y un plano π son *perpendiculares* si r es perpendicular a toda recta s contenida en el plano π.

Si tomamos $\mathbf{u} \in D(r)$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in D(\pi)$, con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ linealmente independientes y $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ un vector característico de π, entonces

r y π son perpendiculares si y sólo si $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0)$ y $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = 0)$, es decir, si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{n}$ son linealmente dependientes.

17.7.4 Ejemplo

Sean la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r: \quad x = 2 - t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 6t,$$

$$\pi: \quad -x + 4y + 6z - 25 = 0,$$

ambos son perpendiculares, ya que en este caso, un vector $\mathbf{u}$ en la dirección de r coincide con un vector característico $\mathbf{n} = (-1, 4, 6)$ del

plano π.

Sean π y ρ dos planos en el espacio con vectores característicos $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y $\mathbf{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$, respectivamente. Entonces

los dos planos son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$, es decir, si y sólo si

$$n_1 n'_1 + n_2 n'_2 + n_3 n'_3 = 0.$$

17.7.5 Ejemplo

Los planos

$$\pi: \quad x + y + z + 1 = 0,$$

$$\rho: \quad 2x - y - z - 3 = 0,$$

son perpendiculares, ya que podemos tomar los vectores característicos $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{n}' = (2, -1, -1)$, y se tiene que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 2 - 1 - 1 = 0$.

Cerraremos esta sección estudiando la distancia de un punto a un plano.

Se llama *distancia de un punto* C *a un plano* π al mínimo de las distancias de C a los puntos P del plano. Es decir,

$$d(C, \pi) = \min\{d(C, P), P \in \pi\}.$$

Es fácil demostrar que

$$d(C, \pi) = d(C, Q),$$

donde Q es el punto de intersección del plano π con la recta que pasa por C y es perpendicular a π.

La fórmula siguiente, que no demostraremos, permite calcular directamente la distancia del punto C al plano π en función de las coordenadas de C y de una ecuación implícita de π.

Si C es el punto (c_1, c_2, c_3) y $\pi : n_1 x + n_2 y + n_3 z + n_0 = 0$, entonces

$$d(C, \pi) = \frac{|n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3 + n_0|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

17.7.6 Ejemplo

La distancia del origen O al plano $\pi : 2x - 4y + 4z + 6 = 0$, es

$$d(O, \pi) = \frac{|6|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{6}{6} = 1.$$

17.7.7 Ejemplo

La distancia del punto C(3, 2, - 1) al plano $\pi : x - 3y + 2z - 5 = 0$, es el número real

$$d(C, \pi) = \frac{|3 - 6 - 2 - 5|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{14}}.$$

17.8 Ejercicios

1.- Se llama esfera de centro $A \in E_3$ y radio $r > 0$, al conjunto de los puntos $P \in E_3$ tales que $d(A, P) = r$. Se pide:

a) Hallar una ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 6.

b) Hallar una ecuación de la esfera que tiene como diámetro el segmento que une los puntos $P_1(2, -2, 4)$ y $P_2(4, 8, -6)$. (Un diámetro de una esfera es un segmento que une dos puntos de la esfera y que, además pasa por el centro).

c) Hallar una ecuación de la esfera cuyo centro es el punto B(4, 0, 2) y que pasa por el punto Q(- 2, 2 5).

d) Hallar una ecuación de la esfera cuyo centro es el punto C(1, 1, 1) y que es tangente al plano $\pi : 2x - 2y + z + 5 = 0$.

2.- Sean los puntos $P_1(5, 2, 2)$ y $P_2(8, 5, 4)$. Se pide:

a) Hallar una ecuación del conjunto de puntos $P \in E_3$ que están a la misma distancia de P_1 y P_2.

b) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto medio del segmento que une P_1 con P_2 y es perpendicular a la recta que pasa por P_1 y P_2. Comparar con el resultado del apartado a).

3.- Se pide:

a) Demostrar que los puntos (- 1, - 3, 7), (- 2, - 2, 9) y (1, 3, 5) son los vértices de un triángulo rectángulo.

b) Demostrar que los puntos (0, 1, - 1), (3, 6, 7) y (8, - 2, 4) son los vértices de un triángulo equilátero.

c) Comprobar que (2, 0, 5), (4, 4, 2) y (8, 12, - 4) están situados sobre una recta.

d) Comprobar que los puntos (2, 1, - 3), (1, - 1, 0) y (1, 3, 0) no están situados sobre una recta.

4.- a) Demostrar que la recta r que pasa por los puntos $P_1(2, 3, 0)$ y $P_2(2, -9, 5)$ y la recta s que pasa por los puntos $P_3(-8, -3, -10)$ y $P_4(-8, 9, -15)$ son paralelas.

b) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $Q_1(1, -3, 2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $Q_2(0, 0, 3)$ y $Q_3(1, -3, 2)$.

c) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P'_1(2, 1, -1)$ y $P'_2(1, 1, 2)$ y es perpendicular al plano $\pi : 7x + 4y - 4z + 30 = 0$.

d) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $Q'_1(3, -1, 2)$ y es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z = 4$ y $\pi_2 : x + 2y + 3z = 5$.

5.- Por un vértice de un cubo se trazan una arista, una diagonal de una cara y una diagonal del cubo. Se pide:

a) Calcular el coseno del ángulo que forma la diagonal del cubo con la arista.

b) Calcular el coseno del ángulo que forma la diagonal de la cara con la diagonal del cubo.

TEMA 18

Sucesiones

En este tema se definen los conceptos de sucesión, de sucesión convergente y de límite de sucesión. Como ejemplos importantes se introducen las progresiones aritméticas y geométricas y la sucesión que define el número real e.

18.1 Concepto de sucesión

La idea de sucesión es muy intuitiva y su comprensión es posible sin necesidad de una definición precisa.

Al decir "sea la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots"$$

estamos indicando que en cada lugar "n" de una hilera infinita tenemos un número a_n, pudiéndose repetir el mismo número en diferentes lugares, es decir, puede ocurrir $a_n = a_{n'}$, $n \neq n'$.

Esta idea intuitiva puede expresarse de manera rigurosa diciendo:

Una sucesión es una función:

$$a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$n \rightarrow a_n$$

de los números naturales en los números reales.

18.1.1 Ejemplos

A continuación presentamos algunos casos concretos de sucesiones:

a) $a_n = n^2$

$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$

b) $a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

c) $a_n = -n$

$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$

Diremos que en el caso a) el término general de la sucesión es n^2, en el caso b) es $\frac{1}{n}$, y en c) el término general es $-n$.

Para denotar a una sucesión con término general a_n utilizaremos la notación $\{a_n\}$.

Asociado al concepto de sucesión aparece el de subsucesión. Responde también a una idea natural.

En términos intuitivos llamaremos subsucesión de una sucesión dada

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

a una sucesión

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

cuyos elementos están en la sucesión original y en el mismo orden pero donde se han omitido algunos elementos.

También esta idea podría expresarse en forma precisa en términos de aplicaciones aunque aquí no lo haremos.

Ilustraremos el concepto de subsucesión con los siguientes ejemplos:

18.1.2 Ejemplos

a) La sucesión

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$$

es una subsucesión de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ que apareció en b) de los ejemplos 18.1.1.

b) La sucesión

$$-1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots$$

es una subsucesión de la sucesión $\{-n\}$ que apareció en c) de los ejemplos 18.1.1.

18.1.3 Ejemplos

Presentamos a continuación dos casos particulares de sucesiones que aparecen con frecuencia en algunas aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias como la economía, la física, etc.

a) *Progresiones aritméticas*: Son aquellas sucesiones $\{a_n\}$ para las cuales existe un número real fijo r tal que:

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

al número r se le llama *razón* de la progresión aritmética.

Una propiedad muy útil de estas sucesiones es que se tiene una sencilla expresión para la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

En efecto, efectuando en columnas la suma siguiente:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1,$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1),$$

y observando que:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + r + a_{n-1} - r = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$\ldots$$

$$a_{p+1} + a_{n-p} = a_1 + a_n,$$

se concluye:

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

es decir:

$$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}.$$

b) *Progresiones geométricas*: son aquellas sucesiones $\{b_n\}$ tales que existe un número real q fijo tal que:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

al número q se le llama *razón* de la progresión.

Se comprueba también, que la suma

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

de los n primeros términos, puede ser expresada en términos de la razón y del primero y n-ésimo términos mediante la fórmula:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \quad (q \neq 1).$$

18.2 Operaciones con sucesiones

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ definimos la *suma* como la sucesión $\{a_n + b_n\}$, es decir, la suma de las sucesiones

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

es la sucesión

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$$

Análogamente se define la *diferencia* como la sucesión $\{a_n - b_n\}$, es decir

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$$

De la misma manera definimos el *producto* de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ como la sucesión $\{a_n . b_n\}$, es decir:

$$a_1 . b_1, a_2 . b_2, \ldots, a_n . b_n, \ldots$$

Finalmente se define el *cociente* de $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ como la sucesión $\{\frac{a_n}{b_n}\}$, es decir:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

Observamos que para que el cociente esté bien definido es preciso que la sucesión $\{b_n\}$ no contenga ningún término igual a cero.

18.2.1 Ejemplos

Aplicamos las definiciones anteriores para obtener la suma, diferencia, producto y cociente de las sucesiones $\{n^2\}$, $\{\frac{1}{n}\}$:

a) $\{n^2\}+\{\frac{1}{n}\} = \{n^2 + \frac{1}{n}\}$.

Es decir sumando las dos sucesiones dadas obtenemos la sucesión:

$$2, \frac{9}{2}, \frac{28}{3}, \ldots, n^2 + \frac{1}{n}, \ldots$$

b) $\{n^2\}-\{\frac{1}{n}\} = \{n^2 - \frac{1}{n}\}$,

$$0, \frac{7}{2}, \frac{26}{3}, \ldots, n^2 - \frac{1}{n}, \ldots$$

c) $\{n^2\}.\{\frac{1}{n}\} = \{n\}$,

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

d) $\dfrac{\{n^2\}}{\{\frac{1}{n}\}} = \{n^3\}$,

$$1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$$

18.3 Clases de sucesiones

A continuación introducimos algunas clases de sucesiones atendiendo a que posean alguna característica específica.

Se llaman sucesiones *positivas* a aquellas sucesiones que verifican $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Se dirá que la sucesión $\{a_n\}$ es *estrictamente positiva* cuando $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Análogamente se dice que una sucesión es negativa si su término general satisface $a_n \leq 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$ y se llamará estrictamente negativa cuando $a_n < 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

18.3.1 Ejemplos

a) La sucesión $\{n^2 + 1\}$ es una sucesión estrictamente positiva. En efecto $n^2 + 1 > 0$ para cualquier número natural n.

b) La sucesión constante $\{a_n=0\}$ es la única sucesión que es positiva y negativa simultáneamente.

c) La sucesión

$$0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots, 0, -\frac{n}{2}, \ldots \text{ (n par)}$$

es negativa pero no estrictamente negativa.

Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es monótona cuando sus términos

crecen o decrecen constantemente. De forma más precisa:

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona creciente* cuando $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Se dice *estrictamente creciente* cuando $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Análogamente llamaremos sucesiones *monótonas decrecientes* a aquellas que verifican $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y hablaremos de sucesiones estrictamente decrecientes cuando se verifica la desigualdad estricta $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Se llaman sucesiones alternadas aquellas en que el signo de a_n es distinto del de a_{n+1} para todo $n \in \mathbf{N}$.

18.3.2 Ejemplos

a) La sucesión $\{n^2\}$ es monótona estrictamente creciente:

$$(n+1)^2 > n^2, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

b) La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \cdots$$

es monótona decreciente pero no estrictamente decreciente.

c) La sucesión constante $\{a_n = c\}$ es monótona creciente y decreciente al mismo tiempo.

d) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es alternada.

Por último introducimos el concepto de sucesiones acotadas. Previamente definimos las sucesiones acotadas superior e inferiormente.

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es *acotada superiormente* cuando existe un número M, llamado cota superior de la sucesión, tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Análogamente llamaremos sucesiones acotadas inferiormente a aquellas sucesiones $\{a_n\}$ que tienen una cota inferior, es decir cuando existe un número m tal que $m \leq a_n$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Finalmente definimos las sucesiones acotadas como aquellas que son acotadas superiormente e inferiormente al mismo tiempo.

18.3.3 Ejemplos

a) La sucesión $\{3 - n\}$ es una sucesión acotada superiormente y una cota superior es $M = 3$. Se comprueba también que no es acotada inferiormente.

b) La sucesión $\{n^2\}$ es una sucesión acotada inferiormente y una cota inferior es $m = 0$. Sin embargo no es acotada superiormente pues dado un número M siempre podemos encontrar un número natural n tal que $n^2 > M$.

c) La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión acotada donde podemos tomar $M = 1, m = 0$.

d) La sucesión $\{(-1)^n n\}$ no es acotada ni superiormente ni inferiormente.

18.4 Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes.

En esta sección se introduce un concepto fundamental en Matemáticas que responde a la idea intuitiva de que los elementos de una sucesión se aproximan a un número fijo. Presentamos directamente la definición rigurosa de este concepto y mediante ejemplos ilustraremos la idea que subyace.

Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales tiene por límite $a \in \mathbf{R}$ y lo representamos por

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

cuando dado $\varepsilon > 0$ arbitario existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene $|a_n - a| < \varepsilon$.

18.4.1 Ejemplos

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Según la definición es preciso que dado $\varepsilon > 0$, exista n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tenga $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Esto claramente se consigue para $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, en efecto, en este caso si $n \geq n_0$ tendremos también

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es decir un término suficientemente avanzado de la sucesión se aproxima tanto como queramos al cero.

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar n_0 de tal forma que para $n \geq n_0$ se tenga

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Puesto que

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}, \text{ para } n \geq n_0,$$

basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, para que

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon.$$

Las sucesiones que poseen límite se llaman sucesiones *convergentes*.

Las siguientes propiedades que relacionan convergencia de sucesiones con sucesiones acotadas y monótonas son muy importantes:

1. Toda sucesión convergente es acotada.
2. Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.
3. Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

- Si una sucesión es monótona creciente y es acotada superiormente, siendo una cota superior M, el límite de tal sucesión es menor o igual que M. Por otra parte si una sucesión es monótona decreciente y es acotada inferiormente, siendo una cota inferior m, el límite de tal sucesión es mayor o igual que m.

18.4.2 Ejemplo

La sucesión

0'3 , 0'33 , 0'333 , 0'3333 ,...

es monótona creciente y tiene por cota superior, por ejemplo, 1. Entonces la sucesión es convergente y su límite es menor que 1. Obsérvese que el límite es $\frac{1}{3}$.

18.5 El número e.

Una de las aplicaciones más importantes de las sucesiones es la construcción y aproximación de números. El número e es un número real no racional que se puede definir por medio de una sucesión. Este número tiene gran cantidad de aplicaciones dentro y fuera de las Matemáticas pues aparece naturalmente en procesos de crecimiento.

Comenzaremos por definir una sucesión cuyo término general es:

$$(1+\frac{1}{n})^{n}.$$

La sucesión anterior es una sucesión acotada superiormente y monótona creciente. El límite de la sucesión es un número irracional cuyas primeras cifras decimales son 2'7182818284 ...

Se define el número e como el límite de la sucesión:

$$\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}.$$

Notas Históricas

Leonardo de Pisa (Fibonacci) nació en Pisa en 1175 y fue un comerciante cuyos viajes a Oriente le permitieron conocer la matemática árabe. En su obra fundamental Liber Abaci describe el sistema de numeración decimal conocido como el sistema Indo-Arábigo, y es a través de dicha obra como el sistema de numeración actual fue introducido en Europa Occidental. Entre sus trabajos aparece también la llamada sucesión de Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores, es decir:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{para} \quad n > 2.$$

18.6 Ejercicios.

1.- Determínese cuáles de las siguientes sucesiones son positivas:

a) $\{2n + 1\}$,

b) $\{n^4 + n^2 + 1\}$,

c) $\{n^2 - 4n + 1\}$.

2.- Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética de razón 4 y cuyo primer término, a_1, es 3. Calcúlese a_{24} y la suma de los 20 primeros términos.

3.- Determínense las sucesiones acotadas superiormente, las acotadas inferiormente y las acotadas entre las siguientes:

a) $\{n^2 + 1\}$,

b) $\{(-1)^n\}$,

c) $\{(-1)^n n\}$.

4.- Estúdiese la convergencia de la sucesión $\{(-1)^n\}$. ¿Es una sucesión acotada?. ¿Es una sucesión monótona creciente o decreciente?.

5.- Demuéstrese que una sucesión sólamente puede poseer un límite.

TEMA 19

Cálculo de límites de sucesiones

Este tema está dedicado a las técnicas más elementales para el cálculo de límites de sucesiones.

19.1 Propiedades aritméticas de los límites de sucesiones

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes con límites a, b respectivamente. Entonces se verifica:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=a+b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=a-b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$$

19.1.1 Ejemplo

La sucesión:

0'3, 0'33, 0'333, 0'3333, ...

converge a $\frac{1}{3}$, la sucesión:

0'6, 0'66, 0'666, 0'6666, ...

converge a $\frac{2}{3}$, así la sucesión suma de las anteriores:

$$0'9,\ 0'99,\ 0'999,\ 0'9999,\ \ldots$$

converge a $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

En el caso particular en que la sucesión $\{b_n\}$ es una sucesión constante, es decir

$$b_n = c,\ c \in \mathbf{R}, \text{ para todo } n \in \mathbf{N},$$

se deduce de las propiedades anteriores:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+c) = \lim_{n\to\infty} a_n + c = a+c$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-c) = \lim_{n\to\infty} a_n - c = a-c$$
$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$$

Finalmente, si $\{b_n\}$ es una sucesión convergente que verifica $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

19.2 Límites infinitos.

En esta sección se introduce la noción de convergencia a infinito de una sucesión. Este concepto responde a la idea de que la sucesión se hace arbitrariamente grande. De forma precisa:

Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a infinito y lo representamos por:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

cuando para cualquier $M \in \mathbf{R}$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$a_n \geq M.$$

19.2.1 Ejemplo

La sucesión $\{n^2\}$ tiende a infinito. En efecto, dado $M \in \mathbf{R}$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbf{N}$ de manera que $n_0 \geq M$ si $n \geq n_0$ entonces

$$n^2 \geq n_0 \geq M.$$

Escribiremos pues:

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty.$$

Análogamente decimos que:

Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a menos infinito y lo representamos por:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

cuando para cualquier $M \in \mathbf{R}$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$a_n \leq M.$$

19.2.2 Ejemplo

$$\lim_{n \to \infty} (-n + 3) = -\infty.$$

En efecto, dado $M \in \mathbf{R}$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbf{N}$ de forma que $n_0 \geq -M + 3$ y si $n \geq n_0$ entonces

$$-n + 3 \leq -n_0 + 3 \leq -(-M + 3) + 3 = M.$$

19.3 Propiedades aritméticas de los límites infinitos

Enunciamos a continuación las propiedades aritméticas de los límites infinitos. Se demuestran utilizando razonamientos similares al caso de los límites finitos. Se recomienda al lector elaborar una demostración detallada de las mismas, pues le será de utilidad para la mejor comprensión de dichos límites.

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos sucesiones tales que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b,$$

donde b es un número real, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

La misma conclusión se obtiene cuando en lugar de las hipótesis anteriores tenemos $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$.

Análogamente, si $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$,

donde b es un número real, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

Otra vez la relación anterior es válida si $b = -\infty$.

En cuanto al producto:

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b > 0$,

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty.$$

La misma conclusión se obtiene cuando $b = +\infty$.

Por el contrario, si $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b < 0$,

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

La misma conclusión se obtiene cuando $b = -\infty$.

Simétricamente, si $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b > 0$,

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b < 0$,

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty.$$

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty,$$

y si $a_n < 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

Los resultados que acabamos de enunciar se pueden expresar de forma simbólica. Por ejemplo, el hecho de que si $a_n \to +\infty$, $b_n \to b \in \mathbf{R}$ entonces $a_n + b_n \to +\infty$ lo representaremos escribiendo:

$$+\infty + b = +\infty.$$

A continuación reunimos todos los resultados anteriores utilizando esta notación:

$$+\infty + b = +\infty,\ +\infty + (+\infty) = +\infty,\ -\infty + b = -\infty,\ -\infty + (-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty).b = +\infty \text{ si } b>0,\ (+\infty).b = -\infty,\ b<0,\ (+\infty).(+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty).b = -\infty \text{ si } b>0,\ (-\infty).b = +\infty,\ b<0,\ (-\infty).(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty).(-\infty) = -\infty,\ \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

19.3.1 Ejemplo

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ con

$$a_n = n^2, b_n = -1 + \frac{1}{n}, c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

de tal forma que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty, \lim_{n \to \infty} b_n = -1, \lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

Se tiene:

a) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$, pues $+\infty.(-1) = -\infty$.

b) $\lim_{n \to \infty} (a_n + c_n) = +\infty$, pues $+\infty + 0 = +\infty$.

c) $\lim_{n \to \infty} (b_n \cdot c_n) = 0$, pues $(-1) \cdot 0 = 0$.

19.4 Límites indeterminados.

Los casos que hemos explicado anteriormente no cubren todos los casos que nos podemos encontrar cuando sumamos, multiplicamos o dividimos sucesiones con límites infinitos.

Por ejemplo también nos podrían aparecer expresiones del tipo:

$$0.(+\infty), \frac{-\infty}{-\infty},$$

a las que no podemos asignarles un resultado único sino que dependerán de las sucesiones de partida. A los límites que dan lugar a estas expresiones les llamamos límites indeterminados.

Para calcular el valor preciso de un límite indeterminado, tendremos que trabajar con la sucesión concreta que tenemos operando adecuadamente de forma que evitemos la indeterminación.

A continuación resumimos algunas de las expresiones indeterminadas

más frecuentes:

$$+\infty + (-\infty),\ (\pm\infty).0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Mediante ejemplos ilustraremos como se deshacen algunas de estas indeterminaciones.

19.4.1 Ejemplo

Si en el cálculo del límite

$$\lim_{n \to \infty} (n^2 - n)$$

se estudian separadamente los límites:

$$\lim_{n \to \infty} n^2, \quad \lim_{n \to \infty} n$$

entonces se llega a una expresión de la forma $+\infty - (+\infty)$, es decir, corresponde a una indeterminación.

Sin embargo si procedemos del siguiente modo:

$$\lim_{n \to \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \to \infty} (n\,(n-1)),$$

y como:

$$\lim_{n \to \infty} n = \lim_{n \to \infty} (n-1) = +\infty,$$

obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} (n^2 - n) = (+\infty).(+\infty) = +\infty.$$

19.4.2 Ejemplo

Sea el límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}.$$

Al calcular separadamente los límites del numerador y denominador se llega a la expresión indeterminada:

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Otra forma de proceder es dividir el numerador y el denominador por n^2 y obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

• La sucesión del ejemplo anterior corresponde a una clase general de sucesiones que llamaremos racionales. Las sucesiones racionales son aquellas cuyo término general es de la forma

$$\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_0},$$

donde k, t son números enteros y $a_k \neq 0$, $b_t \neq 0$.

Al calcular separadamente los límites del numerador y denominador se llega a una expresión indeterminada como ocurría en el ejemplo.

La forma de resolver la indeterminación en el caso general es la misma que se utilizó en el ejemplo. Se dividirá numerador y

denominador por n^s donde s = max(k,t). El resultado que se obtiene es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} \pm\infty, & k > t \\ \dfrac{a_k}{b_k}, & k = t \\ 0, & k < t \end{cases}$$

En el caso k > t, el signo será el mismo que el de $\frac{a_k}{b_t}$.

Notas Históricas

Leonard Euler fue un matemático que nació en Basilea en 1707. Discípulo en su ciudad natal de otro gran matemático, Johann Bernouilli, pasó gran parte de su vida en la Academia de Ciencias de St. Petersburgo, donde murió en 1783. Pasó también un periodo de su vida en la Academia de Ciencias de Berlín.

La obra de Euler causa admiración tanto por su profundidad como por su extensión, pues comprende más de 800 trabajos.

La manera en que Euler trabajaba con los procesos infinitos, como son las sucesiones, dista mucho del punto de vista actual, sin embargo muchas de sus conclusiones pueden ser aceptadas hoy día.

Euler es considerado como uno de los más grandes matemáticos de la historia. Laplacé solía decir a los matemáticos más jóvenes: 'leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros'.

19.5 Ejercicios.

1.- Demostrar que una sucesión monótona creciente no acotada tiende a $+\infty$. Análogamente una sucesión monótona decreciente no acotada tiende a $-\infty$.

2.- Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{n \to \infty} (n - \sqrt{2n+1})$.

b) $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

3. - Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{n^2 + 2}$.

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n^2 + 1}{-n^2 + 2n}$.

TEMA 20

Funciones

En este tema se estudia el concepto fundamental en Matemáticas y en las Ciencias Aplicadas de función. Se definen las operaciones aritméticas y se analizan las propiedades elementales de las funciones.

20.1 Concepto de función

Generalmente existe una cierta dependencia de cantidades variables que describen fenómenos físicos, económicos, etc., respecto de otras que aparecen al estudiar dichos tipos de sistemas, por ejemplo:

a) La relación entre la distancia recorrida por un automóvil y el tiempo empleado.

b) La relación entre la anchura de la región del suelo en que el estampido sónico del Concorde puede oirse directamente y la altitud.

c) La relación entre el precio de un producto y el número de unidades vendidas.

En todos estos ejemplos, los valores de una cantidad variable, que prodríamos designar con y, dependen de los valores de otra variable de dicho sistema que se puede designar por x. Si la relación entre dichas variables es conocida, es decir, se puede determinar de forma clara la dependencia de y respecto de x, se puede hablar de una relación funcional entre x e y, o decir que y es función de x. Habitualmente se escribe tal relación de dependencia de la forma $y=f(x)$, donde f representa nuestro conocimiento de esa dependencia.

De modo formal se puede definir una función como sigue:

Una *función* f de un conjunto A (*dominio* de la función) en un conjunto B (*recorrido* de la función), es una manera (o regla) de asignar a cada elemento $a \in A$ un elemento $b \in B$ que llamaremos f(a). Para representar una función utilizaremos la notación:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ a &\to f(a). \end{aligned}$$

- A lo largo de este curso estaremos especialmente interesados en las funciones que tienen por dominio y recorrido **R**, es decir, $A = B = \mathbf{R}$. En algunos casos se utilizarán dominios o recorridos de funciones que son sólo subconjuntos de **R**.

A las funciones de este tipo las llamaremos funciones reales de variable real.

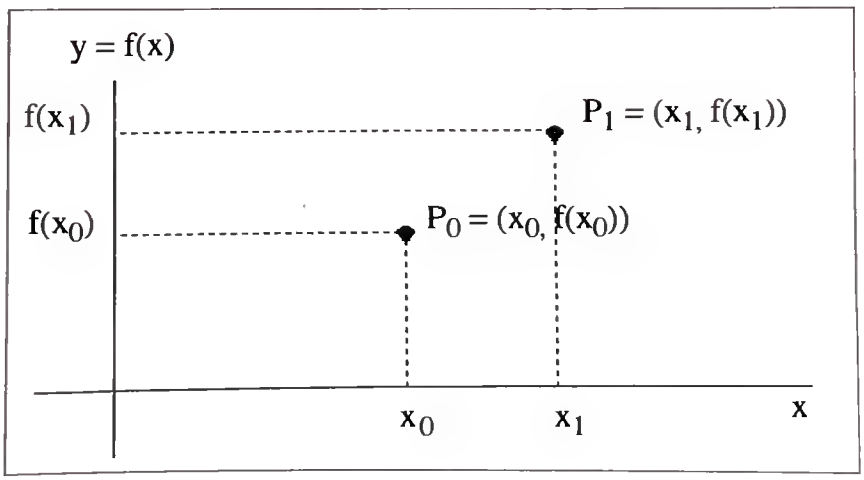
- Dada una función real f de variable real, al argumento de dicha función, es decir a la variable x que recorre o toma valores en el dominio de la función se la designará como *variable independiente*. A la variable $y = f(x)$ que toma valores en el recorrido de dicha función se la designará por *variable dependiente*.

- Normalmente la dependencia funcional entre dos variables vendrá descrita por una ecuación entre dichas variables, por ejemplo:

$$y = x^2 - 4,\ y = \sqrt{16 - 4x^2},\ y = \frac{|x|}{1 - x^3},\ \text{etc.}$$

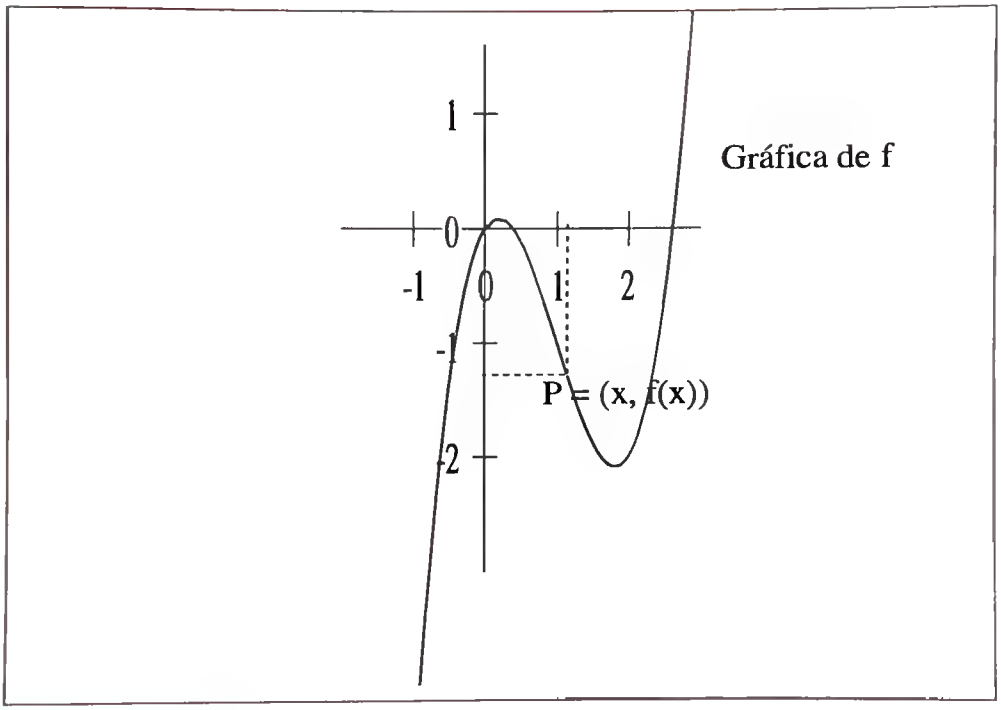
20.2 Gráfica de una función

Dada una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x)$, entonces, para un valor x_0 de la variable x se puede considerar el par $(x_0, f(x_0))$. Este par representa un punto P_0 en el plano cartesiano (véase la figura)



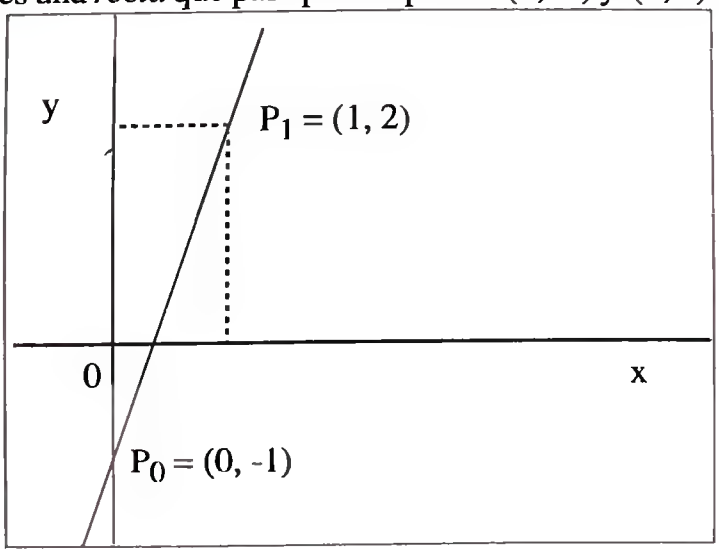
Si ahora consideramos el conjunto de todos los puntos obtenidos de esta manera, obtenemos un subconjunto del plano que llamaremos *gráfica* o *grafo* de f.

En la mayoría de las funciones que vamos a considerar la gráfica de f será una curva.



20.2.1 Ejemplo

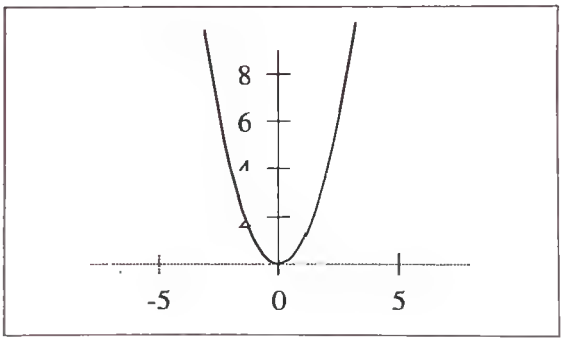
Consideremos la función f : **R** → **R**, y = 3x - 1, la gráfica de esta función es una *recta* que pasa por los puntos (0, -1) y (1, 2):



- La función del ejemplo anterior es un caso particular de la clase de funciones $y = f(x) = ax + b$, llamadas *funciones lineales*. La gráfica de cada una de estas funciones es una línea recta. El número "a" se llama pendiente de la recta y mide la inclinación respecto del eje OX.

20.2.2 Ejemplo

Sea la función $y = f(x) = x^2$. La gráfica de esta función es una parábola.



- La función anterior es un caso particular de la clase de funciones

$$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$$

llamadas *funciones cuadráticas*. La gráfica de cada una de estas funciones es una *parábola*.

20.3 Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales definidas en el mismo conjunto A, $\mathbf{R} \supset A$:

$$f: A \to \mathbf{R}, \quad x \to f(x), \qquad g: A \to \mathbf{R}, \quad x \to g(x),$$

Se define *la función suma* $f + g : A \to \mathbf{R}$, como aquélla que toma en cada punto $x \in A$ el valor:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Se define la *función diferencia* $f - g : A \to \mathbf{R}$ mediante:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{ para todo } x \in A.$$

Se define la *función producto* $f \cdot g : A \to \mathbf{R}$, como aquélla que toma en cada punto $x \in A$ el valor:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Se define el *cociente* $f / g : A \to \mathbf{R}$ mediante :

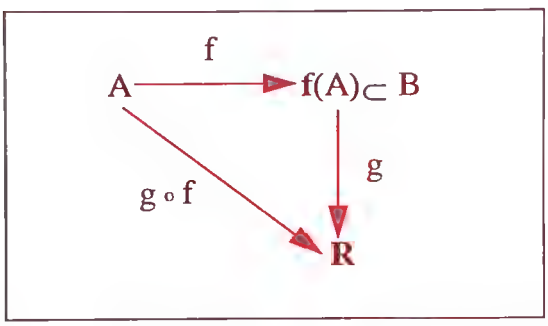
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para todo } x \in A.$$

- Observemos que para que el cociente esté bien definido $g(x)$ no debe anularse nunca, es decir, debe ocurrir $g(x) \neq 0$, para todo $x \in A$.

Además de las operaciones que acabamos de definir se tiene la composición de funciones, que se conoce de la teoría de conjuntos, y que juega un papel importante en la teoría de funciones de variable real. Se puede definir de la siguiente manera:

Sean f, con dominio A, y g funciones tales que el recorrido f(A) de f se encuentra en el dominio B de g. Se define la *composición* de f con g, como la función $g \circ f$, que toma en los puntos del dominio de f el valor

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



20.3.1 Ejemplo

La función $h(x) = +\sqrt{x+3}$ que está definida en $A = \{x \in \mathbf{R}, x \geq -3\}$, es decir, $h : A \to \mathbf{R}, x \to \sqrt{x+3}$, es la composición de las funciones:

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$x \to x + 3$$

$$g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, x \to +\sqrt{x},$$

donde $\mathbf{R}^+ = \{ x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$. Es decir, $h = g \circ f$.

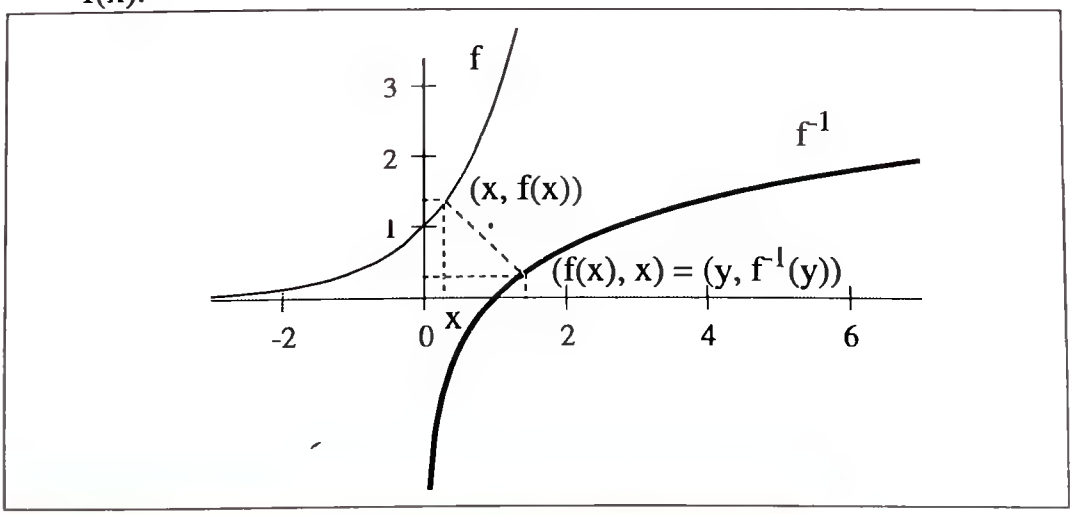
Llamaremos *función identidad* I a la función $I : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to I(x) = x$. Dada una función real diremos que tiene una *función inversa* f^{-1} cuando

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I.$$

20.3.2 Ejemplo

La función inversa de $f(x) = x^3$ viene dada por $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

- Las gráficas de las funciones f y f^{-1} tienen la sencilla propiedad geométrica de ser simétricas respecto de la diagonal del primer y tercer cuadrantes. Este hecho se ilustra en la figura siguiente para la función $y = f(x)$.



20.4 Propiedades de las funciones

En esta sección clasificaremos las funciones atendiendo a algunas propiedades notables. Así introduciremos las clases de funciones

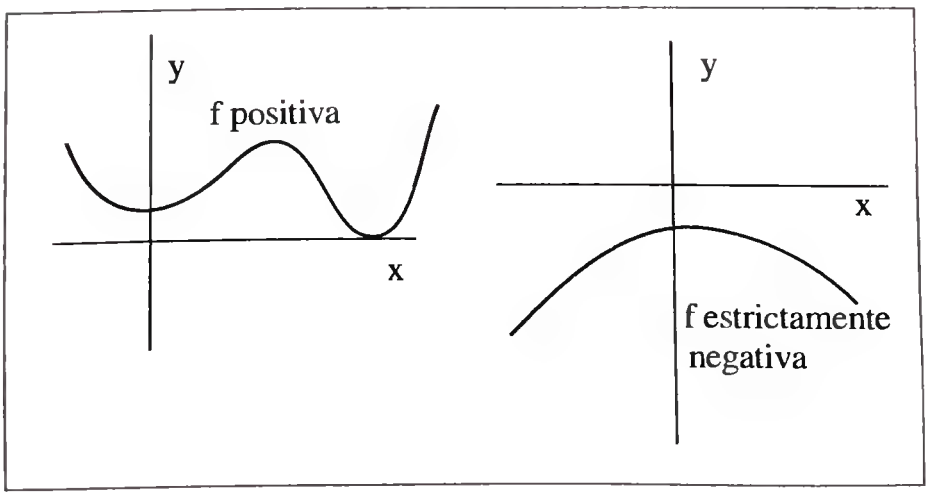
positivas y negativas, crecientes y decrecientes, y pares e impares.

En capítulos posteriores hablaremos de dos clases muy importantes en el estudio de las funciones reales, que son las funciones continuas y las funciones derivables.

Se dice que una *función* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es *positiva* cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Se dice que es estrictamente positiva cuando $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

- La gráfica de una función positiva queda siempre por encima del eje OX de abscisas, en el llamado semiplano superior.

- Análogamente se llaman *funciones negativas* aquellas funciones f que verifican $f(x) \leq 0$, para cada $x \in \mathbf{R}$, y serán estrictamente negativas cuando $f(x) < 0$, para cada $x \in \mathbf{R}$.



20.4.1 Ejemplo

a) $f(x) = x^2$ es una función positiva,

b) $f(x) = -1 - x^4$ es una función negativa,

c) $f(x) = 3x$ no es ni positiva ni negativa.

• Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se dice que es monótona creciente si cuando el valor de la variable x crece entonces el valor de la función f(x) también crece. En términos más precisos

Una función real f es *monótona creciente* si para $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se dice que es *monótona estrictamente creciente* si cuando $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

• De manera análoga si para $x_1 \leq x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$ hablamos de una función monótona decreciente. Y diremos que f es estrictamente decreciente cuando de $x_1 < x_2$ se deduce $f(x_1) > f(x_2)$.

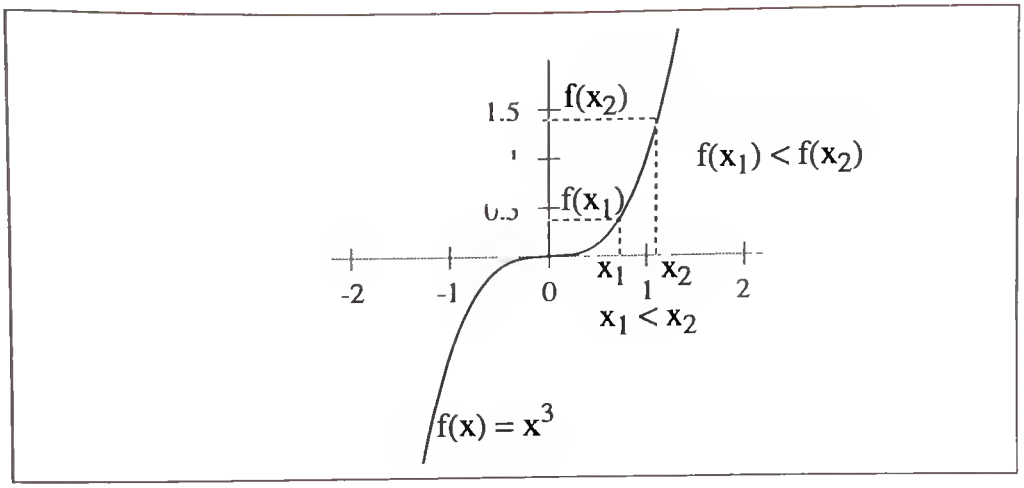
20.4.2 Ejemplo

a) $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente.

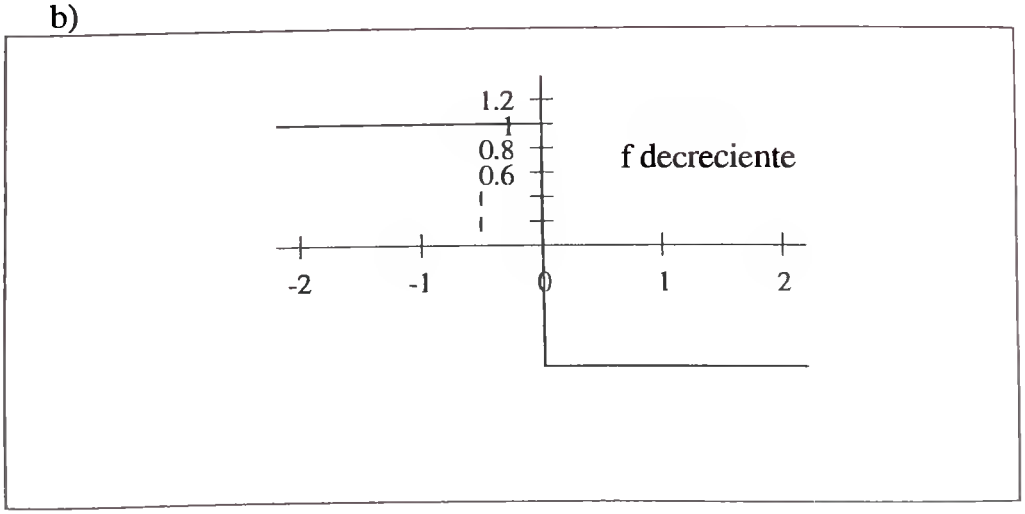
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ -1 & , x > 0 \end{cases}$ es decreciente

y sus gráficas son

a)


1.5
f(x2)
f(x1) < f(x2)
f(x1)
-2
-1
0
x1
1
x2
2
x1 < x2
f(x) = x3

b)


1.2
0.8
0.6
f decreciente
-2
-1
0
1
2

Diremos que una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es *par* cuando $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

• La razón de esta terminología es que las funciones potenciales $f(x) = x^m$ ($m \in \mathbf{N}$) son funciones pares según nuestra definición si, y sólo si, m es par.

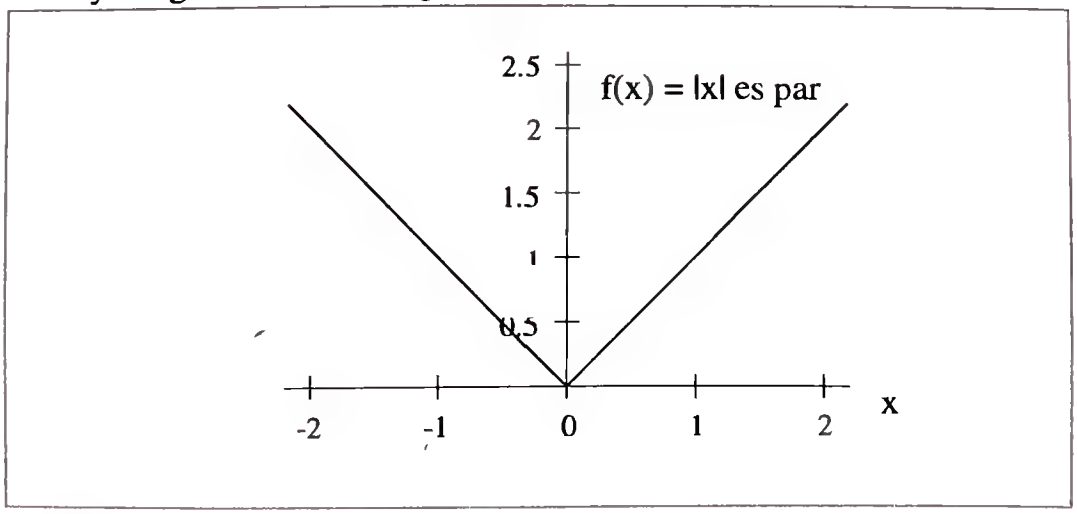
No todas las funciones pares son de esta forma. Similarmente se llaman funciones impares aquellas funciones f tales que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

20.4.3 Ejemplo

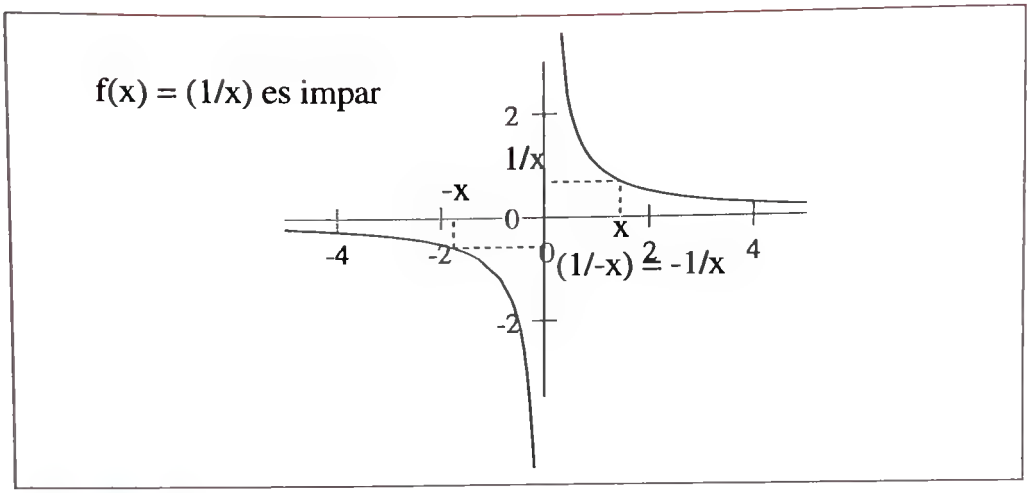
a) La función $f(x) = |x|$ es una función par

b) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbf{R} - \{0\}$) es una función impar.

y sus gráficas son las siguientes: a)



b)



Notas Históricas

Agustin Louis Cauchy. Matemático Francés nacido en París en 1789. Profesor en la prestigiosa Escuela Politécnica de París, se considera que fue quien sentó los fundamentos rigurosos del Cálculo moderno.

Cauchy y sus contemporáneos fueron quienes comenzaron a dar claridad a conceptos como el de función que hasta el momento había sido utilizado sin un sentido totalmente preciso por matemáticos anteriores como Euler y Lagrange.

Es una figura estelar dentro de las Matemáticas, y en particular, dentro de la Teoría de Funciones, son fundamentales sus contribuciones al estudio de las funciones de variable compleja.

20.5 Ejercicios

1.- Estudiar si las siguientes funciones son monótonas:

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^2+1$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

2.- Estudiar si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^3|$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

3.- Demostrar que la única función que es par e impar es la función constante de valor cero.

4.- Demostrar que las funciones monótonas estrictas (crecientes o decrecientes) son inyectivas.

TEMA 21

Polinomios

En este tema se introduce el concepto básico de polinomio, se definen las operaciones aritméticas entre polinomios y se presenta la descomposición de un polinomio en factores simples.

21.1 Concepto de Polinomio

Los polinomios son expresiones en las que aparecen unos números determinados, llamados coeficientes, relacionados con una variable mediante las operaciones elementales de suma, diferencia y multiplicación. Los polinomios dan lugar a las funciones polinómicas, que son los ejemplos más sencillos de funciones que se pueden presentar.

La importancia de los polinomios es múltiple tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. En estas últimas, aparecen a la hora de aproximar funciones. Estas aproximaciones permiten operar de forma más fácil y rápida, siempre que se estudie previamente el error que se comete al realizarlas.

Un *polinomio*, P, con coeficientes reales es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

• Los números reales a_0, a_1, ..., a_n se llaman coeficientes del polinomio. Algunos de estos coeficientes pueden ser iguales a cero. Si suponemos que $a_n \neq 0$ diremos que n es el grado del polinomio.

Es decir, se llama *grado de un polinomio* al exponente de la potencia máxima con coeficiente no nulo, de entre las que aparecen en la expresión del polinomio. En la definición anterior tendremos que el grado es n y escribiremos grad(P) = n, si $a_n \neq 0$, dicho coeficiente a_n recibe el nombre de coeficiente principal de P.

• Los polinomios se suelen representar por letras tales como P, Q, S, o bien si se especifica la variable por P(x), Q(x), S(x).

21.1.1 Ejemplo

a) Los números reales se pueden considerar como polinomios de grado cero. En particular P(x) = 3, representa al polinomio $P(x) = 3x^0$.

b) Los polinomios de primer grado son los de la forma $P(x) = a_1x + a_0$, $a_1 \neq 0$, y se llaman también polinomios lineales. Un caso particular es P(x) = 3x - 2.

c) Los polinomios de segundo grado son los de la forma

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2 \neq 0,$$

y se llaman polinomios cuadráticos. Un ejemplo es $P(x) = x^2 + 1$.

Funciones polinómicas. A todo polinomio P(x) se le puede asociar una función que se representará con la misma letra

$$P : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \to a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Dicha función hace corresponder a cada número real x_0 la imagen $P(x_0)$, que se obtiene substituyendo en el polinomio la variable x por el número real x_0.

21.2 Operaciones con polinomios

Dados dos polinomios cualesquiera, P(x) y S(x), siempre podremos escribirlos en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$S(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

pues, en el caso en que no sean del mismo grado, por ejemplo, si

$$\text{grad}(S) = m < n = \text{grad}(P),$$

entonces escribiremos $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{m+1} = 0$.

Habiendo escrito dos polinomios P, S en la forma anterior se define la *suma de dichos polinomios*, P y S, como el polinomio

$$(P+S)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0).$$

- Análogamente se define el polinomio diferencia P - S mediante

$$(P-S)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0).$$

A continuación se define el producto de polinomios.

Se llama producto o multiplicación de los polinomios P y S al polinomio P . S cuyos coeficientes vienen dados por

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ldots + a_kb_0, \quad 0 \leq k \leq \text{grad}(P) + \text{grad}(S).$$

- La definición anterior de producto de dos polinomios podría parecer a primera vista complicada y no justificada, sin embargo es facil llegar a tal expresioón de la siguiente forma natural: si se expresa el producto de dos monomios, es decir, de polinomios que constan de un solo término, de la siguiente forma

$$(a_rx^r)(b_sx^s) = a_rb_sx^{r+s},$$

entonces se llega a la definición anterior para polinomios cualesquiera multiplicando todos los términos de P por todos los términos S y agrupando los productos obtenidos con el mismo exponente.

21.2.1 Ejemplo

Sean $P(x) = x - 1$, $S(x) = x^2 + x + 1$, entonces

a) $(P + S)(x) = x^2 + 2x$

b) $(P - S)(x) = -x^2 - 2$

c) $(P \,.\, S)(x) = x(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$

21.3 División Euclidea de Polinomios

Procediendo de una manera análoga a la del caso de los números enteros se puede probar el siguiente resultado:

Dados dos polinomios P, S, con $S \neq 0$, existen dos polinomios Q y R, tales que

$$P = SQ + R, \quad \text{grad}(R) < \text{grad}(S).$$

Llamaremos al *polinomio* Q *cociente* de la división de P por S y diremos que R es el *resto* de dicha división.

Los polinomios Q y R son únicos. En efecto supongamos que Q_1, R_1 satisfacen también las condiciones del cociente y el resto de la división de P y S, es decir,

$$P = SQ_1 + R_1, \quad \text{grad}(R_1) < \text{grad}(S),$$

entonces de esta relación junto con la anterior se obtiene por substracción

$$S(Q - Q_1) = R_1 - R.$$

Si fuese $Q - Q_1 \neq 0$, se tendría que $R_1 - R \neq 0$ y

$$\text{grad}(R_1 - R) = \text{grad}(S) + \text{grad}(Q - Q_1) \geq \text{grad}(S),$$

lo cual es imposible, puesto que

$$\text{grad}(R) < \text{grad}(S) \quad \text{y} \quad \text{grad}(R_1) < \text{grad}(S).$$

- No presentaremos una demostración detallada de la existencia de Q y R y nos limitaremos a presentar un ejemplo para describir el procedimiento de obtención.

21.3.1 Ejemplo

Obtener el cociente y el resto de dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 - 1$ por $S(x) = x^2 + x + 1$.

Solución

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline -(3x^3 + 3x^2 + 3x) & 3x - 3 \\ \hline -3x^2 - 3x - 1 & \\ -(-3x^2 - 3x - 3) & \\ \hline +2 & \end{array}$$

donde obtenemos $Q(x) = 3x - 3$ y $R(x) = 2$.

El primer término del cociente 3x ha sido obtenido dividiendo el término de grado superior de P(x), es decir, $3x^3$, entre el término de grado superior de S(x), x^2, así pues hemos obtenido $3x^3 / x^2 = 3x$. Una vez obtenido el primer término de Q, se multiplica este término por S, es decir, efectuamos el producto $3x \cdot (x^2 + x + 1)$, y el resultado se subtrae de P, obteniendo el polinomio

$$P_1(x) = -3x^2 - 3x - 1,$$

que tiene grado menor que P. A continuación procedemos con P_1 como hicimos al comienzo con P.

- Un caso particular de división de polinomios ocurre cuando el polinomio S es un polinomio de grado uno de la forma x - a. En este caso el procedimiento general antes descrito puede escribirse en forma más abreviada, de la manera que indicamos a continuación, que se conoce como *regla de Ruffini*, y en la que sólo aparecen los coeficientes de los polinomios.

Dado el polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, entonces los coeficientes del cociente, Q, (c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_0) y el resto R de dividir dicho polinomio por x - a, se pueden obtener de la siguiente forma:

	a_n	a_{n-1}	$a_{n-2} \cdots$	a_1	a_0
a		$c_{n-1}\, a$	$c_{n-2} a \ldots$	$c_1\, a$	$c_0\, a$
	$c_{n-1} (= a_n)$	c_{n-2}	$c_{n-3} \cdots$	c_0	R

donde cada número de la última fila se obtiene sumando los números que se encuentran encima.

Es evidente que si en la expresión P = (x - a)Q(x) + R(x) hacemos x = a, tenemos P(a) = R. Luego para que un polinomio sea divisible por x - a, basta que dicho polinomio se anule para x = a, ya que entonces el resto es cero.

21.3.2 Ejemplo

(a) Dividir el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 29$ entre el polinomio S(x) = x - 7.

(b) Dividir el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ entre el polinomio S(x) = x + 2.

(c) Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 15x + m$ se pide determinar m de manera que al dividir dicho polinomio por x + 1 el resto sea igual a -30.

Solución

(a)

	1	2	-3	4	-29
3		3	15	36	120
	1	5	12	40	91(= R)

El polinomio cociente Q será aquél cuyos coeficientes vienen dados por los primeros términos de la fila inferior del esquema

$$Q(x) = x^3 + 5x^2 + 12x + 40$$

(b)

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0 (= R)

$$Q(x) = x^2 + x - 2.$$

(c)

	4	-6	15	m
-1		-4	10	-25
	4	-10	25	m - 25 (= R)

luego resolviendo la ecuación m - 25 = - 30, se obtiene el valor buscado, m = -5.

21.4 Descomposición en factores de un polinomio

Se dice que un número real a es una *raíz* del polinomio P, cuando el valor de la función polinómica asociada es cero en a, es decir, si $P(a) = 0$.

- El conocimiento de las raíces de un polinomio es de un gran interés, pues en particular veremos que permite una descomposición del polinomio como producto de polinomios más sencillos. Además conociendo las raíces del polinomio podríamos prácticamente reconstruir el polinomio.

Con el fin de establecer de forma precisa estos hechos introducimos la noción de divisibilidad de polinomios.

Decimos que un polinomio P es divisible por otro polinomio S cuando el resto de la división de P por S es el polinomio nulo, es decir, $R \equiv 0$.

La definición anterior equivale a decir que P se puede escribir de la forma $P = S \cdot Q$, siendo Q un polinomio, el cociente de la división de P por S

A continuación probamos el siguiente hecho básico:

Un número $a \in \mathbf{R}$ es una raíz de un polinomio P(x) si, y sólo si, P es divisible por x - a.

En efecto supongamos que a es una raíz de P, es decir, $P(a) = 0$. Dividimos P entre el polinomio $S(x) = x - a$, entonces podemos escribir

$$P(x) = (x - a)Q + R,$$

donde

$$\text{grad}(R) < \text{grad}(x-a) = 1,$$

es decir, R ha de ser un polinomio de grado cero, es decir , una constante. En particular para $x = a$ se tendrá $P(a) = R$ y puesto que $P(a) = 0$, concluímos que $P(x) = (x - a)Q$.

Recíprocamente si $P(x) = (x - a)Q(x)$, entonces haciendo $x = a$ se obtendrá $P(a) = 0$.

A continuación introducimos la definición de raíz múltiple de un polinomio. Responde a la idea de que varias de las raíces del polinomio se encuentran localizadas en un mismo punto $x = a$.

Una definición precisa de este hecho se enuncia de la siguiente forma

Un número $a \in \mathbf{R}$ es una *raíz múltiple* de orden m de un polinomio P, cuando P es divisible por $(x - a)^m$ y no lo es por $(x - a)^{m+1}$.

- Cuando $m = 1$ hablaremos de raíces simples. Cuando $m = 2$ de raíces dobles, etc.

21.4.1 Ejemplo

El polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene una raíz doble en $x = 1$. En efecto $P(x) = (x - 1)^2$.

- No todos los polinomios tienen alguna raíz en el campo real. Por ejemplo el polinomio $P(x) = x^2 + 1$, no puede tomar el valor cero para ningún valor $a \in \mathbf{R}$, pues siempre es $P(a) \geq 1$.

Sin embargo, si nosotros admitimos no solamente raíces reales $a \in \mathbf{R}$, como hasta ahora, sino también raíces complejas, es decir, números complejos $a \in \mathbf{C}$ tales que $P(a) = 0$, entonces la situación es diferente.

En efecto se tiene el siguiente resultado:

Teorema fundamental del Algebra.
Todo polinomio de grado mayor o igual que uno tiene al menos una raíz compleja $a \in \mathbf{C}$.

Este teorema, central en Matemáticas, requiere métodos de carácter más avanzado que los que se han visto en este curso para su demostración. Así pues, nos limitaremos a enunciarlo y lo utilizaremos para la descomposición en factores de un polinomio.

Antes de proceder a presentar la descomposición en factores, haremos una importante observación sobre las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales.

Raíces complejas de un polinomio.
Un polinomio con coeficientes reales posee una raíz compleja α de orden n si, y sólo si, el número conjugado $\overline{\alpha}$ también es una raíz del mismo orden, n , del polinomio.

En efecto, si

$$P(x) = (x - \alpha)^n Q(x),$$

tomando conjugados, también se tendrá

$$\overline{P(x)} = (x - \overline{\alpha})^n \overline{Q(x)},$$

y como $\overline{P(x)} = P(x)$, puesto que estamos suponiendo que P tiene coeficientes reales, deducimos

$$P(x) = (x - \overline{\alpha})^n \overline{Q(x)},$$

es decir $\overline{\alpha}$, es también una raíz de orden n de P.

Finalmente presentamos la descomposición en factores de un polinomio.

Descomposición en factores de un polinomio con coeficientes reales.

Todo polinomio P, con coeficientes reales, de grado $n \geq 1$ se puede escribir de la forma:

$$P(x) = c(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_r)^{m_r}(x^2-2b_1x+c_1)^{n_1} \dots$$

$$\dots (x^2-2b_sx+c_s)^{n_s}$$

donde c es el coeficiente principal de P, $a_1, a_2, \dots, a_r$ son las raíces reales de P con multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_r$ respectivamente, $b_1, c_1, \dots, b_s, c_s$ son números reales cumpliendo las condiciones $b_1^2 < c_1, \dots, b_s^2 < c_s$, y $n_1, n_2, \dots, n_s$ son números naturales que verifican

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2(n_1 + n_2 + \dots + n_s) = n.$$

21.4.2 Ejemplo

El polinomio $P(x) = x^3 - 8$, como se puede ver fácilmente aplicando la regla de Ruffini, admite la descomposición

$$P(x) = x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Esta es la descomposición enunciada en nuestro teorema, puesto que el polinomio $Q(x) = x^2 + 2x + 4$ no tiene raíces reales.

21.5Funciones Racionales

Intimamente relacionados con los polinomios y con las funciones polinómicas están las funciones racionales.

Se llaman funciones racionales a las funciones de la forma

$$T(x) = \frac{P(x)}{S(x)}$$

donde P(x), S(x) son funciones polinómicas, con $S(x) \neq 0$.

En la definición de funciones racionales P, S pueden ser polinomios arbitrarios con tal que $S \neq 0$. Sin embargo, en el estudio de las funciones racionales nos vamos a restringir a las *funciones racionales propias*, es decir, aquellas para las cuales grad(P) < grad(S). En efecto en caso contrario, si grad (P) ≥ grad(S), podemos efectuar la división euclídea de P entre S, de tal forma que podemos escribir P = SQ + R, grad(R) < grad(S). Utilizando esta relación, la función racional T adopta la forma

$$T(x) = \frac{S(x)\,Q(x) + R(x)}{S(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)} \ .$$

Es decir,

Una función racional arbitraria T se puede escribir como la suma de un polinomio y de una función racional propia.

Utilizando la descomposición en factores de un polinomio , se obtiene

la descomposición en fracciones simples de una función racional propia.

Descomposición en fracciones simples.
Toda función racional propia

$$T(x) = \frac{P(x)}{S(x)}, \text{grad}(P) < \text{grad}(S),$$

admite una descomposición como suma de fracciones de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^h}.$$

No describiremos con precisión tal descomposición ni daremos una demostración de la misma. Ilustraremos, a continuación, este teorema con algunos ejemplos.

21.5.1 Ejemplo

a) Caso de una función racional cuyo denominador tiene sólamente raíces reales simples.

Para descomponer en fracciones simples la función racional

$$T(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

obtenemos en primer lugar la descomposición en factores del denominador

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

La descomposición en este caso será de la forma

$$T(x) = \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Operando se obtiene

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{(A_1+A_2)x + A_1 - A_2}{x^2-1},$$

igualando numeradores,

$$3x+1 = (A_1+A_2)x + A_1 - A_2,$$

identificando coeficientes,

$$A_1 + A_2 = 3$$

$$A_1 - A_2 = 1,$$

y resolviendo este sistema resulta $A_1 = 2$, $A_2 = 1$. Por tanto, la descomposición obtenida es

$$T(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

b) Caso de una función racional cuyo denominador tiene raíces reales múltiples.

Para obtener la descomposición en fracciones simples de la función racional

$$T(x) = \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x},$$

procedemos como en el caso anterior y descomponemos en factores el denominador,

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 .$$

En este caso la descomposición buscada será de la forma

$$T(x) = \frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1}.$$

Operando se obtiene

$$\frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A_1 (x-1)^2 + A_2 x + A_3 x (x-1)}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$= \frac{(A_1 + A_3) x^2 + (A_2 - A_3 - 2A_1) x + A_1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

igualando numeradores e identificando coeficientes

$$A_1 + A_3 = 0$$
$$A_2 - A_3 - 2A_1 = 2$$
$$A_1 = 1$$

y resolviendo el sistema se obtiene

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = 3, \qquad A_3 = -1 ,$$

es decir,

$$T(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

c) Caso de una función racional cuyo denominador contiene raíces complejas.

Sea la función racional

$$T(x) = \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1} .$$

La descomposición en factores del denominador es, en este caso,

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1) .$$

En este caso, la descomposición en fracciones simples será de forma

$$T(x) = \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} .$$

Operando se obtiene

$$\frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A_1 (x^2 + 1) + (x - 1)(Bx + C)}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$= \frac{(A_1 + B) x^2 + (C - B) x + (A_1 - C)}{x^3 - x^2 + x - 1},$$

igualando numeradores e identificando coeficientes, se llega a

$$A_1 + B = 0$$

$$C - B = 2$$

$$A_1 - C = 0,$$

es decir

$$A_1 = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 1,$$

$$T(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Notas Históricas

Muhammed Múse ibn Al-Khwarizmi fue un matemático árabe que vivió en el siglo noveno. Al-Khwarizmi escribió varios libros que tuvieron gran transcendencia posterior. En uno de ellos aparece en su título el término Al-jabr de donde derivó el actual término de Algebra. Su nombre Al-Khwarizmi también ha dado lugar al término Algoritmo, de uso habitual en Matemáticas.

21.6 Ejercicios

1.- Comprobar las siguientes identidades de polinomios:

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

c) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

d) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

2.- Efectuar las siguientes divisiones entre polinomios

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^4 + x^3 - x}{x^2 + x + 1}$

3.- Descomponer en factores los polinomios:

a) $x^4 - 1$

b) $x^3 - 3x^2 + 2x$

4.- Descomponer en fracciones simples:

a) $\dfrac{1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$

b) $\dfrac{x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

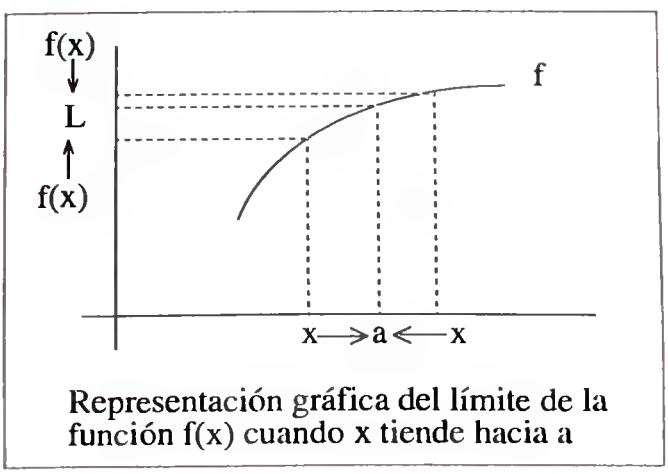
TEMA 22

Límites de funciones

En este tema se estudia el concepto de límite para funciones reales de una variable real. De manera intuitiva, una función f tiene por límite L en un punto a cuando f(x) puede aproximarse a L tanto como se quiera si se elige x suficientemente próximo de a.

22.1 Límite de una función

En todo lo que sigue consideraremos funciones reales de variable real, es decir funciones definidas en un subconjunto de **R** y que toman valores en **R**.



Representación gráfica del límite de la función f(x) cuando x tiende hacia a

Si a y L son números reales y f es una función, la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

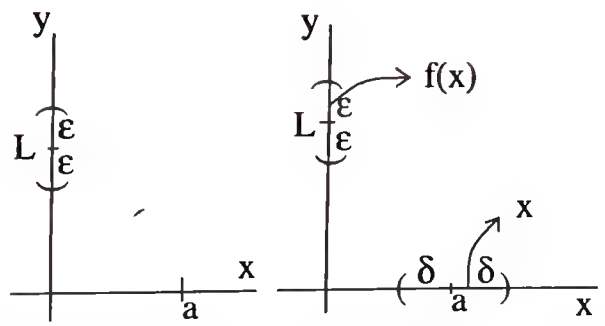
se lee: *el límite cuando x tiende hacia a de f(x) es L,* o también *f(x) tiende hacia L cuando x tiende hacia a.* Esto significa que f(x) puede hacerse tan próximo a L como queramos siempre que x se elija suficientemente próximo de a; con más precisión:

Se dice que una función *f tiende hacia L,* o que *tiene por límite* L cuando x tiende hacia a y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

• La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ precisa la proximidad deseada entre f(x) y L. Las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$ fijan la proximidad que ha de existir entre x y a para que se cumpla $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Se dice que una función f *tiende hacia* L, o que tiene *por límite* L cuando x tiende hacia a *por la izquierda* y se escribe

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L,$$

cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < a - x < \delta$.

Se dice que una función f *tiende hacia* L, o que tiene *por límite* L cuando x tiende hacia a *por la derecha* y se escribe

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L,$$

cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < x - a < \delta$.

De manera intuitiva, x tiende hacia a por la izquierda (respectivamente, por la derecha) cuando x se aproxima hacia a manteniéndose menor (respectivamente, mayor) que a.

- Los límites por la izquierda y por la derecha de f en a se llaman *límites laterales de f en a*. Como

$$|x - a| = \begin{cases} a - x & \text{si } x < a \\ x - a & \text{si } x > a \end{cases}$$

la condición $0 < |x - a| < \delta$ que figura en la definición de límite equivale a las dos condiciones

$$0 < a - x < \delta \quad \text{y} \quad 0 < x - a < \delta.$$

Por consiguiente, se verifica

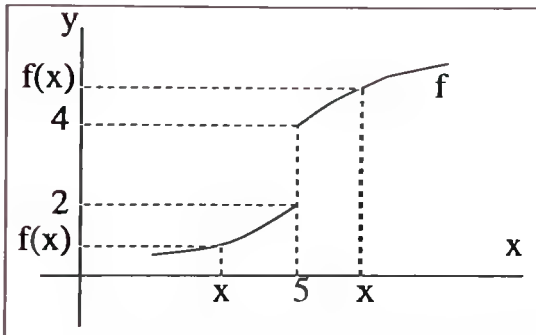
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y sólo si se cumplen

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = L;$$

con otras palabras,

> El límite de una función f en un punto a existe y es igual a L si y sólo si existen los dos límites laterales de f en a y son iguales a L.



Existen los límites por la derecha (= 4) y por la izquierda (= 2), cuando x tiende a 5, pero no coinciden. Por tanto la función no posee límite en x = 5

22.1.1 Ejemplos

a) Sea c un número real y sea f la función constante definida por f(x) = c para cada $x \in \mathbf{R}$. Entonces, para cualquier número a se tiene

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

pues para cada $\varepsilon > 0$ se cumple $|f(x) - c| = |c - c| = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y la condición de la definición de límite se satisface con cualquier $\delta > 0$ que se elija.

b) La función identidad, f(x) = x para cada $x \in \mathbf{R}$, verifica

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

para todo $a \in \mathbf{R}$. En efecto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $|x - a| < \delta$. (Basta tomar $\delta = \varepsilon$).

c) La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

no tiene límite cuando x tiende a cero pues

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$

y

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

y el límite de f cuando x tiende a cero no existe porque los límites laterales de f en 0 son distintos.

d) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} 1 = 1$$

y

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} x = 1$$

y por tanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

22.2 Cálculo de límites

El límite de la suma, diferencia o producto de dos funciones es igual a la suma, diferencia o producto de los límites, respectivamente. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites cuando

el del denominador es distinto de cero.

Aquí nos limitaremos a enunciar formalmente estas cuatro propiedades omitiendo las demostraciones. El lector interesado en ellas puede encontrarlas en cualquier libro de cálculo.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

1. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L + M,$
2. $\lim_{x \to a} (f-g)(x) = L - M,$
3. $\lim_{x \to a} (fg)(x) = L\,M,$
4. $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$ cuando $M \neq 0$

22.2.1 Ejemplos

a) Por inducción resulta que para cualquier número natural n se cumple

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

en todo punto a. En efecto: Hemos visto ya que esto se cumple para n = 1. Supongámoslo cierto para n - 1, es decir, supongamos que

$$\lim_{x \to a} x^{n-1} = a^{n-1}.$$

Entonces, como el límite de un producto es el producto de los límites,

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} x^{n-1} x = a^{n-1} a = a^n.$$

b) Como el límite de una constante es igual a esa constante y el límite de

un producto es el producto de los límites, se cumple

$$\lim_{x \to a} cx^n = c\,a^n$$

cualesquiera que sean los números reales a y c y para todo número natural n.

Esto nos permite calcular el límite de una función polinómica sin más que tener en cuenta que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\lim_{x \to a} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n.$$

El límite de una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) se obtiene aplicando el hecho de que el límite de un cociente es el cociente de los límites cuando el del denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x \to a} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} = \frac{a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n}{b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \ldots + b_m a^m}$$

para todo $a \in \mathbf{R}$ con $b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \ldots + b_m a^m \neq 0$.

c) A veces el cálculo de un límite requiere algunas manipulaciones algebraicas. Así por ejemplo, si se trata de calcular

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2},$$

no podemos sustituir x por 2 en el numerador y en el denominador pues ambos se anulan para $x = 2$ y nos quedaría una indeterminación de la forma $0/0$. Sin embargo, para $x \neq 2$ se cumple

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-3)\,(x-2)}{(x-2)\,(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

y por tanto,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{2x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

22.3 Límites infinitos y límites en el infinito

En 22.1 hemos definido el significado del simbolismo $\lim_{x \to a} f(x) = L$ cuando a y L son números reales. Las ocho definiciones siguientes precisan el significado de este simbolismo en los casos en que a o L o ambos sean infinitos.

1. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

3. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < s$.

4. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) < r$ siempre que $x < s$.

5. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) > r$ siempre que $x < s$.

6. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > s$.

7. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) < r$ siempre que $x > s$.

8. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) > r$ siempre que $x > s$.

Las propiedades de 22.2 se extienden para límites infinitos y para límites en el infinito como sigue:

Sean $a, L, M \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ y supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$; entonces

1. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$,
2. $\lim_{x \to a} (f-g)(x) = L - M$,
3. $\lim_{x \to a} (fg)(x) = L\,M$,
4. $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$ cuando $M \neq 0$

• Estas propiedades se verifican siempre que estén definidos los segundos miembros. Recordemos que no están definidos $\infty - \infty$, $0.\infty$, ∞ / ∞ y $1/0$.

22.3.1 Ejemplos

a) Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{para } x \neq 0,$$

Entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ pues para cada $r \in R$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0 < |x| < \delta$: Si $r \leq 0$ para cualquier $\delta > 0$ se satisface esta condición, y si $r > 0$ basta tomar $\delta = 1 / \sqrt{r}$.

b) $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ porque para cada $r \in \mathbf{R}$ existe $s \in \mathbf{R}$ tal que $x > r$ siempre que $x > s$ (basta tomar $s = r$).

Por inducción resulta

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

para todo número natural n.

c) $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ porque para cada $r \in \mathbf{R}$ existe $s \in \mathbf{R}$ tal que $x < r$ siempre que $x < s$ (basta tomar $s = r$).

Por inducción resultan

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

para todo número natural n.

d) Consideremos una función polinómica

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

Para $x \neq 0$ se tiene

$$f(x) = x^n \left(c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n} \right);$$

cuando $x \to +\infty$, el primer factor tiende a $+\infty$ y el segundo factor tiende a c_n, luego

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } c_n > 0 \\ -\infty \text{ si } c_n < 0 \end{cases}$$

Cuando $x \to -\infty$, el primer factor tiende a $+\infty$ si n es par y a $-\infty$ si n es impar, y el segundo factor tiende a c_n, luego

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\begin{cases} +\infty \text{ si n es par y } c_n > 0 \text{ ó si n es impar y } c_n < 0 \\ -\infty \text{ si n es impar y } c_n > 0 \text{ ó si n es par y } c_n < 0 \end{cases}.$$

e) Los limites en $-\infty$ y en $+\infty$ de una función racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

se determinan fácilmente dividiendo el numerador y el denominador por x^p siendo p el menor de los números n y m:

i) Para $|x|$ suficientemente grande se tiene

$$\frac{2x^2 - 3}{3x^3 - 7x - 1} = \frac{2 - \dfrac{3}{x^2}}{3x - \dfrac{7}{x} - \dfrac{1}{x^2}}.$$

El numerador de esta última fracción tiende a 2 cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. El denominador tiende a $-\infty$ en el primer caso y a $+\infty$ en el

segundo. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^3 - 7x - 1} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^3 - 7x - 1}.$$

ii) Para $|x|$ suficientemente grande se tiene

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{4x^3 + x + 3} = \frac{3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$ el numerador de esta última fracción tiende a 3 y el denominador tiende a 4. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{4x^3 + x + 3} = \frac{3}{4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{4x^3 + x + 3}.$$

iii) Para $|x|$ suficientemente grande se tiene

$$\frac{2x^4 - 1}{3x^2 - 3} = \frac{2x^2 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{3}{x^2}}.$$

Cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$ el numerador de esta última fracción tiende a $+\infty$ y el denominador tiende a 3. Por consiguiente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 1}{3x^2 - 3} = +\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - 1}{3x^2 - 3}.$$

Se observará que en estos tres ejemplos hemos comenzado con las palabras *para* $|x|$ *suficientemente grande*. Esto lo hemos hecho con el fin de que todas las fracciones estén definidas, es decir, con el fin de que los denominadores sean distintos de cero.

• Los límites laterales de una función en un punto $a \in \mathbf{R}$ pueden ser infinitos. A continuación se definen los cuatro casos posibles:

1. $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0 < a - x < \delta$.

2. $\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0 < a - x < \delta$.

3. $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0 < x - a < \delta$.

4. $\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0 < x - a < \delta$.

Está claro que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si y sólo si

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty = \lim_{x \to a+} f(x)$$

y que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si y sólo si

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to a+} f(x).$$

22.3.2 Ejemplos

a) Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0,$$

Entonces

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

y, por tanto, no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \text{ para } x \neq 1.$$

Entonces

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to 1+} f(x)$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

22.4 Ejercicios

1.- Estudiar si existen o no los límites cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 1$ de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida para cada $x \in \mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

2.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$;

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

3.- Estudiar si existe o no el límite cuando $x \to 1$ de la función $f: \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}$ definida para cada $x \neq 1$ por

$$f(x)=\frac{x}{x^3-1}.$$

4.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$;

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3\,(x^2-3x+2)}\right)$.

5.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2+1}$;

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^2+x+1}{3x^2-x+1}$.

TEMA 23

Funciones continuas

De manera intuitiva, una función es continua en un intervalo cuandc su gráfica en dicho intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Con más precisión, una función f es continua en un punto a cuando el límite de f en a coincide con el valor de f en el punto a, lo que nos dice que los valores de f en puntos próximos a a se aproximan a f(a), y una función es continua en un intervalo cuando lo es cada uno de sus puntos.

23.1 Funciones continuas

Dados un número real a y una función f, no siempre se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Puede ocurrir que la función f no esté definida en el punto a, en cuyo caso no existe f(a) y la igualdad anterior no tiene sentido.

También puede ocurrir que no exista $\lim_{x \to a} f(x)$, en cuyo caso tampoco tiene sentido la igualdad.

Finalmente, aunque existan $\lim_{x \to a} f(x)$ y f(a), puede ocurrir que sean distintos.

Se dice que un función f es *continua en un punto a* cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

• Con la terminología *épsilon-delta* esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Pero para $x = a$ también es

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

Por consiguiente, podemos suprimir la condición $0 < |x - a|$ y escribir la definición de continuidad en la siguiente forma:

Una función f es *continua en un punto a* cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$.

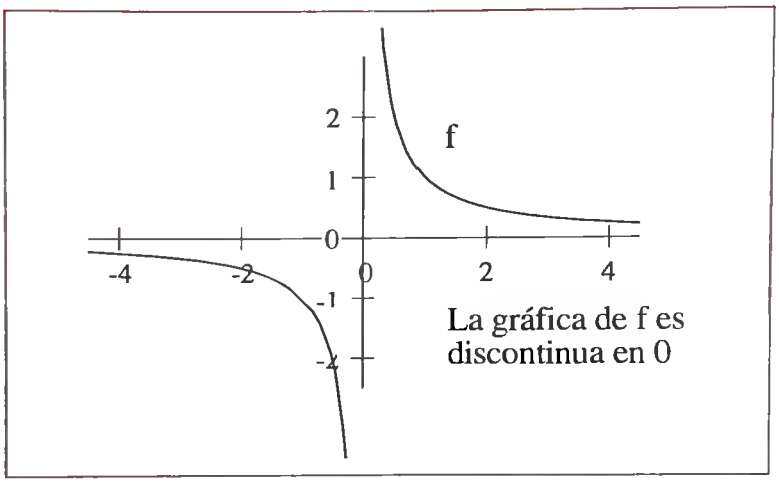
23.1.1 Ejemplos

a) La función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

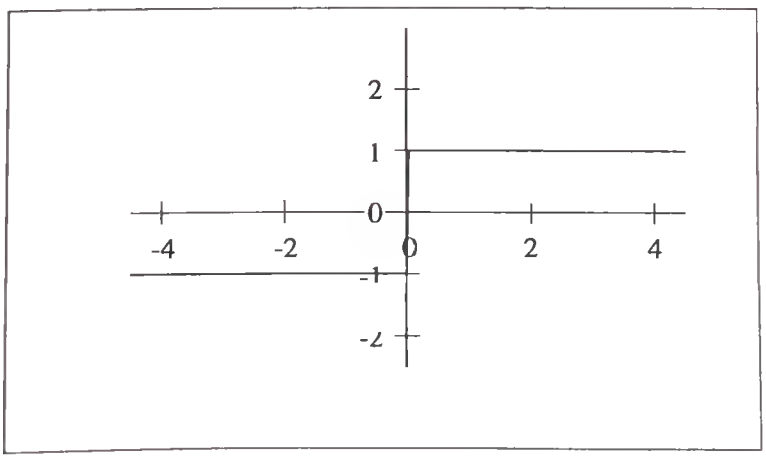
no es continua en 0 porque no está definida en 0. Sin embargo, es continua en cualquier otro punto a pues para todo $a \neq 0$ se verifica

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = f(a).$$



b) La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



no es continua en 0 porque no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Sin embargo, es continua en cualquier otro punto pues para todo $a < 0$ se verifica

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-1) = -1 = f(a)$$

y para todo $b > 0$,

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} 1 = 1 = f(b).$$

c) La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es continua en 0 porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \neq 1 = f(0).$$

Sin embargo, es continua en cualquier otro punto a pues para todo $a \neq 0$ se verifica

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a).$$

d) Según vimos en el Ejemplo2 de 22.2.1, las funciones polinómicas son continuas en todo punto y las funciones racionales son continuas en todo punto que no anule al denominador.

Se dice que una función f es *continua por la izquierda en un punto a* cuando

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Se dice que una función f es *continua por la derecha en un punto a* cuando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

- Es evidente que una función f es continua en un punto a si y sólo si es continua por la izquierda y por la derecha en el punto a.

Se dice que una función f es *continua en un intervalo abierto* (a, b) cuando es continua en todo punto del intervalo.

Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] cuando es continua en el intervalo abierto (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

23.2 Operaciones con funciones continuas

Sean f y g dos funciones continuas en un punto a. Entonces las funciones f + g, f - g y fg son también continuas en a. Si además es g(a) ≠ 0, entonces la función f / g también es continua en a.

En efecto: Como f y g son continuas en a, se verifican

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

y por tanto,

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

y

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = f(a)\, g(a) = (f \cdot g)(a),$$

luego f + g, f - g y f g son continuas en a.

Si además es g(a) ≠ 0, entonces

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

y por tanto, f / g es continua en a

> Si f es una función continua en a y g es una función continua en f(a) entonces la función compuesta gof es continua en a.

Para ver esto, sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que probar que existe un $\delta > 0$ tal que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$.

Como g es continua en f(a), existe un δ_1 tal que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ siempre que $|y - f(a)| < \delta_1$.

Como f es continua en a, cualquiera que sea el número positivo δ_1 existe otro número positivo δ tal que $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ siempre que $|x - a| < \delta$.

Por consiguiente, $|g(f(x) - g(f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$, conforme queríamos demostrar.

23.3 Funciones continuas en intervalos

La imagen de un intervalo por una función continua es otro intervalo. De este hecho se deduce que una función continua en un intervalo pasa de un valor a otro tomando todos los valores comprendidos entre esos dos (teorema de los valores intermedios) y que si una función continua en un intervalo cerrado toma valores de signo contrario en los extremos de dicho intervalo, se anula al menos en un punto interior al intervalo (teorema de Bolzano). Finalmente, una función continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo en dicho intervalo (teorema de Weierstrass).

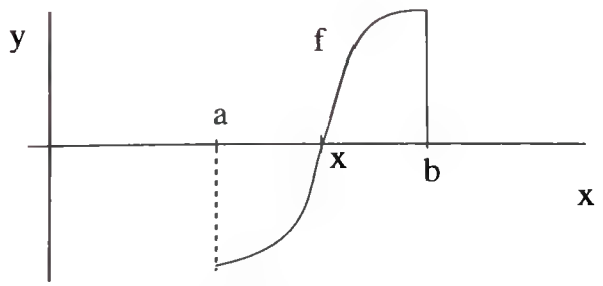
> Sean I un intervalo y $f: I \to \mathbf{R}$ una función continua. Entonces el conjunto $f(I) = \{f(x): x \in I\}$ es también un intervalo.

> **Teorema de los valores intermedios:**
> Sea f una función continua en [a, b]. Si c es un número real comprendido entre f(a) y f(b), existe al menos un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$

En efecto: pongamos I = [a, b]. Por la proposición anterior, f(I) es un intervalo que contiene a f(a) y a f(b), luego contiene también a c, es decir, existe $x \in I$ tal que $f(x) = c$.

Teorema de Bolzano:
Si f es una función continua en un intervalo [a, b] que toma valores de signo contrario en los extremos de dicho intervalo existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.

Basta observar que como 0 es un número real comprendido entre f(a) y f(b), por el teorema de los valores intermedios existe al menos un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$, y como f(a) y f(b) son distintos de cero, $x \in (a, b)$.

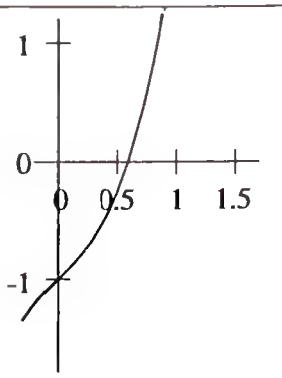


Según el Teorema de Bolzano la función f se anula en un punto x del intervalo (a, b)

23.3.1 Ejemplo

Como aplicación del teorema de Bolzano vamos a probar que el polinomio $2x^3 + x - 1$ tiene una raíz comprendida entre 0 y 1.

La función polinómica $f(x) = 2x^3 + x - 1$ es continua en el intervalo [0, 1] (es continua en todo **R**) y como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = 0$ que es lo que queríamos demostrar.



Gráfica de $f(x) = 2x^3 + x - 1$ en el intervalo [0, 1]

Otra propiedad importante de las funciones continuas que admitiremos es la siguiente:

Teorema de Weierstrass:
Si f es continua en [a, b] entonces f tiene un máximo y un mínimo en [a, b], es decir, existen puntos c y d de [a, b] tales que

$$f(c) \geq f(x) \text{ y } f(d) \leq f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

23.4 Continuidad de la función inversa

Se dice que una función f definida en un intervalo I es *creciente* (respectivamente, *decreciente*) en I cuando para cada par de puntos x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Una función *monótona* en un intervalo I es una función creciente o decreciente en I.

Es evidente que una función monótona en un intervalo I es inyectiva en I y existe, por tanto su función inversa f^{-1}. Si además f es continua

en I se puede probar que f(I) es un intervalo. Más aún, se puede demostrar que su función inversa es también continua en I. Nos limitaremos a enunciar estas propiedades.

> Sea f una función continua y creciente (respectivamente, decreciente) en un intervalo I. Entonces f(I) es un intervalo y la función inversa f^{-1} es también continua y creciente (resp. decreciente) en f(I).

23.4.1 Ejemplos

a) Sea n un número natural impar. La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^n$ para $x \in \mathbf{R}$ es creciente y continua en $\mathbf{R}$. Además, como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

para todo $k \in \mathbf{R}$ existen $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tales que $f(x_1) < k < f(x_2)$ y, por el teorema de los valores intermedios, existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = k$. Por consiguiente, el dominio de definición de la función inversa f^{-1} es $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ y dicha función inversa será también creciente y continua en $\mathbf{R}$. Vamos a determinar esta función inversa.

Poniendo $y = f(x) = x^n$ se tiene $f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$, luego $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función definida por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \text{ para cada } x \in \mathbf{R}.$$

b) Sea n un número natural par. La función $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^n$ para cada $x \geq 0$ es creciente y continua en $[0, +\infty)$. Además, como $f(0) = 0$ y

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

para todo número real $k > 0$ existe un número real $x_1 > 0$ tal que $f(0) < k < f(x_1)$ y, por el teorema de los valores intermedios, existe $x > 0$ tal que $f(x) = k$. Por consiguiente, el dominio de definición de la función inversa f^{-1} es $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ y dicha función inversa es

también creciente y continua en [0, +∞). Para determinar esta función inversa pondremos $y = f(x) = x^n$, con lo que $f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$ y, por tanto, f^{-1}: [0, +∞) → **R** es la función definida por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \text{ para cada } x \geq 0.$$

c) Para calcular

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

(obsérvese que es una indeterminación de la forma (+∞) - (+∞)), podemos proceder de la siguiente forma: De la identidad

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

se deduce que para $a \neq b$ se cumple

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

y poniendo $a = \sqrt{x^2 + 3x}$ y $b = \sqrt{x^2 - 2x}$ en esta última resulta

$$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 3x - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}.$$

(en la última igualdad hemos dividido por x numerador y denominador, lo cual es lícito pues nos podemos limitar a considerar valores de x mayores que cero. Ahora bien, haciendo el *cambio de variable* $1 / x = y$, se tiene que $x \to +\infty$ si y sólo si $y \to 0+$, luego

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x}} = \lim_{x \to 0+} \sqrt{1 + 3y} = 1$$

ya que la función f(y) =1 - 3y es continua en 0 y la función $g(t) = \sqrt{t}$ es continua en $t = f(0) = 1$. Análogamente se comprueba que

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \frac{5}{2}.$$

23.5 Ejercicios

1.- Hallar el valor de la constante **c** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ c \text{ si } x=1 \end{cases}$$

sea continua en 1.

2.- Estudiar la continuidad de la función f de **R** en **R** definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3.- Estudiar la continuidad de las funciones f y g de **R** en **R** definidas por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases},$$

y la de la función compuesta gof.

4.- Probar que la función $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

tiene inversa creciente y continua y determinar dicha función inversa.

5.- Utilizar la identidad

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

y el hecho de que la función "raiz cúbica" es continua para calcular

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}) .$$

TEMA 24

Funciones derivables

En este tema se estudia el concepto de derivada de una función en un punto y se establecen las primeras reglas de la derivación.

24.1 Funciones derivables

Se dice que una función f *es derivable en un punto* a cuando existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En este caso, dicho límite se designa por $f'(a)$ y se llama *derivada de* f *en* a.

Por consiguiente, una función f es derivable en a si y sólo si los límites

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existen y son iguales. Estos límites se llaman *derivadas laterales* (*por la izquierda* y *por la derecha*, respectivamente) de f en a.

Así pues, la derivada de una función f en un punto a es, por

definición,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuando este límite exista. A veces se escribe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

lo cual no supone más que el cambio de notación $x = a + h$ (Obsérvese que cuando h tiende a 0, x tiende hacia a y recíprocamente).

Se dice que una función f es *derivable en un intervalo abierto* (a, b) cuando es derivable en todo punto de dicho intervalo.

24.1.1 Ejemplos

a) Sea f la función definida por $f(x) = c$ para cada $x \in \mathbf{R}$, donde c es un número real dado. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

y, por tanto, la función $f(x) = c$ es derivable en todo punto y $f'(a) = 0$ para todo a.

b) Sea f la función definida por $f(x) = x$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por tanto, la función $f(x) = x$ es derivable en todo punto y $f'(a) = 1$ para todo a.

c) Sea f la función definida por $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$

y, por tanto, la función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto y $f'(a) = 2a$ para todo a.

d) La función f definida por $f(x) = |x|$ para cada $x \in \mathbf{R}$ no es derivable en $a = 0$ puesto que

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

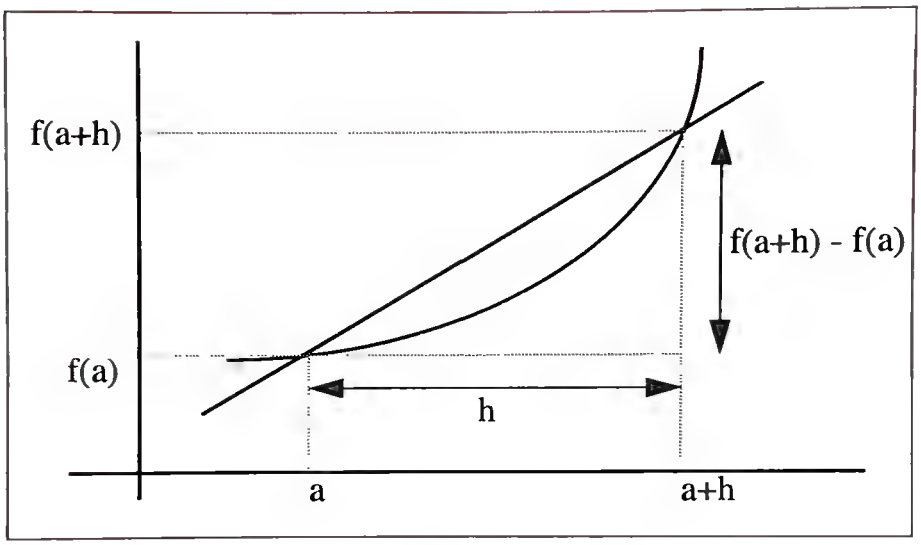
y por tanto

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1,$$

luego no existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} .$$

• Sea f una función derivable en un punto a y consideremos la gráfica de f, es decir, el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^2$ de la forma (x, f(x)) donde x recorre el dominio de f. Dos puntos de la gráfica de f determinan un recta secante a dicha gráfica. La ecuación de la secante que pasa por el punto (a, f(a)) y por otro punto arbitrario (a + h, f(a + h)), $h \neq 0$, de la gráfica de f es



$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a).$$

La tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) es la *recta límite* de las rectas secantes que pasan por (a, f(a)) y por otro punto arbitrario (a+h, f(a+h)), $h \neq 0$, de la gráfica cuando este último "tiende a confundirse" con el punto (a, f(a)), es decir, cuando h tiende a 0. Pero cuando h tiende a 0 el cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tiende a f'(a). Así pues, por definición, *la tangente a la gráfica de* f *en* (a, f(a)) *es la recta*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Obsérvese que esta tangente sólo está definida cuando f es derivable en a. Obsérvese también que la tangente en (a, f(a)) es la recta que pasa por (a, f(a)) y que tiene como vector direccional (1, f'(a)).

Si una función f es derivable en a entonces f es continua en a.

En efecto, por ser f derivable en a existe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y como, para $x \neq a$, es

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .(x - a),$$

se tiene

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = f'(a).0 = 0$$

luego

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

es decir, f es continua en a.

• El resultado recíproco no es cierto en general. Hay funciones continuas que no son derivables. Un ejemplo nos lo proporciona la función $f(x) = |x|$ que es continua en 0 pero no es derivable en 0. Incluso existen funciones que son continuas en todo punto y no son derivables en ninguno.

El resultado anterior nos da un criterio de no derivabilidad. Si una función no es continua en un punto a entonces tampoco es derivable en a pues, si lo fuese, en virtud de dicho resultado, sería continua en a.

24.1.2 Ejemplo

La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

no es derivable en 0 puesto que no es continua en 0.

24.2 Cálculo de derivadas

Si f y g son derivables en a entonces f + g y f - g son también derivables en a y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad y \quad (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

Veámoslo, para $h \neq 0$ se tiene

$$\frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} =$$

$$\frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} =$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

como f y g son derivables en a,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad y \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a),$$

luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = f'(a) + g'(a).$$

Análogamente se prueba que f - g es también derivable en a y
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

- De este resultado se obtiene inmediatamente por inducción, que si $f_1, f_2, ..., f_n$ son n funciones derivables en a entonces $f_1 + f_2 + ... + f_n$ es también derivable en a y

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \ldots + f_n'(a).$$

Si f y g son derivables en a entonces fg es también derivable en a y

$$(f\,g)'(a) = f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a).$$

En efecto, para $h \neq 0$ se tiene

$$\frac{(fg)\ (a+h) - (fg)\ (a)}{h} =$$

$$\frac{f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a)}{h} =$$

$$\frac{f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a+h) + f(a)\,g(a+h) - f(a)\,g(a)}{h} =$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,g(a+h) + f(a)\,\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Ahora bien, f y g son derivables en a y, por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a),$$

Además, g es continua en a (por ser derivable), luego

$$\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)\ (a+h) - (fg)\ (a)}{h} = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a),$$

es decir, fg es derivable en a y

$$(f\,g)'(a) = f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a).$$

24.2.1 Ejemplos

a) Sea n un número natural. La función f_n definida por $f_n(x) = x^n$ para cada $x \in \mathbf{R}$ es derivable en todo punto y $f_n'(a) = n\,a^{n-1}$ para todo a. Para ver esto procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es cierto pues, según hemos visto en el ejemplo 2 de 24.1.1 la función $f_1(x) = x$ es derivable en todo punto y $f_1'(a) = 1$ para todo a. Supongamos que $f_{n-1}'(a) = (n-1)\,a^{n-2}$. Por el resultado anterior, el producto de dos funciones derivables es derivable y como $f_n = f_1\,f_{n-1}$, resulta

$$f_n'(a) = f_1'(a)\,f_{n-1}(a) + f_1(a)\,f_{n-1}'(a) =$$

$$1 \cdot a^{n-1} + a \cdot (n-1)\,a^{n-2} = n \cdot a^{n-1}.$$

b) Una función polinómica

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

es derivable en todo punto. En efecto: f es suma de la función constante (y, por tanto, derivable) $f_0(x) = c_0$ y de las n funciones $f_k(x) = c_k x^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ que también son derivables (por ser producto de funciones derivables). Además, para cada $a \in \mathbf{R}$ se tiene $f_0'(a) = 0$ y $f_k'(a) = k\,c_k a^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y, por tanto,

$$f'(a) = c_1 + 2c_2\,a + \ldots + n\,c_n a^{n-1}.$$

Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$ entonces f/g es también derivable en a y

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{(g(a))^2}$$

Veámoslo, para $h \neq 0$ se tiene

$$\frac{(\frac{f}{g})(a+h)-(\frac{f}{g})(a)}{h}=\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h}=$$

$$\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}=$$

$$\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}=$$

$$\frac{1}{g(a+h)g(a)}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a)-f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)$$

y como

$$\lim_{h\to 0} g(a+h)=g(a),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \text{ y } \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$$

se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{f}{g})(a+h)-(\frac{f}{g})(a)}{h}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

conforme queríamos demostrar.

- De este resultado y teniendo en cuenta que las funciones polinómicas son derivables en todo punto (ejemplo 2 de 24.2.1) se deduce que una función racional es derivable en todo punto que no anule al denominador.

24.2.2 Ejemplos

a) La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida para cada $x \in \mathbf{R}$ por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

es derivable en todo punto a por ser una función racional y ser $a^2 + 1 \neq 0$. Además,

$$f'(a) = \frac{1 \cdot (a^2 + 1) - (a \cdot 2a)}{(a^2 + 1)^2} = \frac{-a^2 + 1}{(a^2 + 1)^2}.$$

b) La función $f: \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}$ definida para cada $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ por

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$$

es derivable en todo punto $a \neq 1$ y

$$f'(a) = \frac{(2a - 5)(a - 1) - (a^2 - 5a + 6) \cdot 1}{(a - 1)^2} = \frac{a^2 - 2a - 1}{(a - 1)^2}.$$

• El siguiente resultado, cuya demostración omitiremos, se conoce como *regla de la cadena* y nos da condiciones suficientes para la derivabilidad de una función compuesta.

> Si f es derivable en a y g es derivable en f(a) entonces la función compuesta gof es derivable en a y
> $$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

• También admitiremos sin demostración *la regla de la derivación de funciones inversas*:

> Sea f una función monótona y continua en un intervalo. Si f es derivable en un punto a interior a dicho intervalo y $f'(a) \neq 0$ entonces su función inversa f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y
>
> $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

24.2.3 Ejemplos

a) Sea n un número natural impar. La función f definida por

$$f(x) = x^n \text{ para cada } x \in \mathbf{R}$$

es creciente y continua en $(-\infty, +\infty)$. Su función inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \text{ para cada } x \in \mathbf{R}$$

y según el resultado anterior, para $x \neq 0$, se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} =$$

$$\frac{1}{nx^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

b) Sea n un número natural par. La función f definida por

$$f(x) = x^n \text{ para cada } x \geq 0$$

es creciente y continua en $[0, +\infty)$. Su función inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \text{ para } x \geq 0;$$

de igual manera que en el ejemplo anterior se deduce que, para $x > 0$ se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}.$$

c) Según hemos visto en el ejemplo 1 de 24.2.1 y en los dos ejemplos anteriores, si $h(x) = x^r$ y r es un número entero o el inverso de un número natural, entonces $h'(x) = r\,x^{r-1}$ para todo $x > 0$. Esta fórmula es también válida cuando r es un número racional. En efecto, el número racional r se puede escribir $r = m/n$, donde m es un número entero y n un número natural y h es la función compuesta $g$of donde

$$g(x) = x^m \text{ y } f(x) = x^{1/n}$$

y por la regla de la cadena,

$$h'(x) = g'(f(x)).\, f'(x) = m\,(f(x))^{m-1}.(1/n)\,x^{(1/n)-1} =$$

$$m(x^{1/n})^{m-1}.\,(1/n)\,x^{(1/n)-1} = (m/n)\,x^{(m/n)-1} = r\,x^{r-1}.$$

d) La función h definida por

$$h(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2} \text{ para cada } x \in \mathbf{R}$$

es la función compuesta $g$of, donde

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ y } g(x) = x^{1/2}$$

y, por la regla de la cadena

$$h'(x) = g'(f(x)).\, f'(x) = (1/2)(f(x))^{1/2-1}.(2x + \text{[illegible]} =$$

$$(1/2)(x^2+1)^{-1/2}(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

24.3 Derivadas sucesivas

Dada una función f, la función que a cada $x \in \mathbf{R}$ en el que f sea derivable hace corresponder la derivada $f'(x)$ de f en x, se llama

función derivada (primera) de f y se designa por f' o por $f^{(1)}$. La función (f')', es decir, la función derivada de f', se llama *derivada segunda* de f y se designa por f'' o por $f^{(2)}$. Análogamente, la función (f'')', derivada de f'', se llama *derivada tercera* de f y se designa por f''' o por $f^{(3)}$.

Por inducción se definen las *derivadas sucesivas* de una función f:

$$f^{(1)} = f',\ f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Con el fin de unificar las notaciones se escribe a veces $f^{(0)} = f$.

24.3.1 Ejemplos

a) Las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3$ son

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ para } n > 3.$$

b) Sea m un número natural y consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^m} = (x-a)^{-m},\ x \neq a.$$

Entonces, para $x \neq a$,

$$f'(x) = -m\,(x-a)^{-m-1},$$
$$f''(x) = m\,(m+1)\,(x-a)^{-m-2},$$
$$f'''(x) = -m\,(m+1)\,(m+2)\,(x-a)^{-m-3}.$$

De estas fórmulas se puede inferir la derivada n-sima de f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)(x-a)^{-m-n}.$$

Probaremos esta fórmula por inducción: Ya hemos visto que se cumple para n = 1. Supongámosla cierta para n - 1, es decir, supongamos que

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}m(m+1)(m+2)...(m+n-2)(x-a)^{-m-n+1}.$$

Entonces también es cierta para n puesto que, derivando, se obtiene

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(-m-n+1)(x-a)^{-m-n} =$$

$$(-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)(x-a)^{-m-n}.$$

24.4 Interpretación de la derivada

Supongamos que una partícula se mueve en línea recta y que el espacio recorrido por ella al cabo de un tiempo x es $f(x)$. La velocidad media de dicha partícula en un intervalo de tiempo es, por definición, el espacio recorrido en ese intervalo de tiempo partido por el tiempo invertido. Así, la velocidad media entre dos instantes a y $a+h$ viene dada por el cociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

La *velocidad instantánea* de la partícula en el instante a es por definición, el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es decir, $f'(a)$ (derivada del espacio respecto al tiempo en el punto a).

La derivada segunda $f''(a)$ se llama *aceleración* de la partícula en el instante a.

Notas Históricas

A finales del siglo XVI los problemas de movimiento eran el tema principal de la Física. La gran cantidad de observaciones acumuladas impulsa a la ciencia hacia la investigación cuantitativa de las formas de movimiento y las funciones, como imágenes abstractas de los procesos de movimiento y dependencia, comienzan a ser objeto de cálculo.

Los viejos problemas de determinación de tangentes, áreas y volúmenes contribuyeron también en gran medida a impulsar los procedimientos de cálculo.

Con Newton y Leibnitz (siglo XVII) aparecen los conceptos de límite y derivada. Sin embargo, hasta la segunda mitad del siglo XIX no se comprendió bien el significado de la continuidad (se pensaba que toda función continua debía ser derivable en casi todos los puntos y ni siquiera había acuerdo entre los matemáticos sobre el concepto de función. Gauchy dio las primeras definiciones correctas de límite, de función continua y de derivada y Bolzano hizo el primer estudio riguroso de las funciones continuas.

24.5 Ejercicios

1.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$

2.- Determinar las constantes a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea derivable en 0.

3.- Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$;

b) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq -1$;

c) $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3}$, $x > 0$

d) $k(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, $x > 0$;

e) $p(x) = x\sqrt{1+x^2}$; f) $q(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

4.- ¿ En qué punto la tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 7x + 3$$

es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

5.- El espacio en metros f(x) recorrido por una partícula sobre una recta al cabo de x segundos viene dado por

$$f(x) = 100 + 5x - 0'001x^3.$$

Hallar la velocidad y la aceleración de dicha partícula en los instantes $x = 1$ y $x = 10$.

TEMA 25

Estudio y representación de funciones

Ya hemos visto la utilidad de las derivadas para el trazado de tangentes y para el cálculo de velocidades. En este tema vamos a ver que también son muy útiles para el estudio de la variación de las funciones, esto es, para analizar cuándo son crecientes o decrecientes, y también para determinar la concavidad o convexidad de sus gráficas.

25.1 Máximos y mínimos

Por el teorema de Weierstrass una función continua f en un intervalo cerrado [a, b] tiene un *máximo* y un *mínimo* en [a, b], es decir, existen puntos c y d de [a, b] tales que

$$f(c) \geq f(x) \text{ y } f(d) \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Estos puntos c y d no tienen por qué ser únicos. El valor máximo de la función continua f en [a, b] puede alcanzarse en varios puntos de [a, b] y lo mismo ocurre con el mínimo. Por ejemplo, el máximo y el mínimo de una función constante $f(x) = k$ en [a, b] son iguales a k y se alcanzan en cualquier punto de [a, b].

Nos proponemos aquí determinar los valores máximo y mínimo de una función continua en un intervalo cerrado, así como los puntos de dicho intervalo en los que la función toma esos valores. Para ello, empezaremos con un resultado que deja el problema casi resuelto.

Si una función f definida en un intervalo abierto I tiene un máximo o un mínimo en un punto $a \in I$ y f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.

En efecto, como f es derivable en a existen los limites

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y son iguales a $f'(a)$.

Si f tiene un máximo en a se verifica

$$f(x) - f(a) \leq 0 \text{ para todo } x \in I$$

y, por tanto,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \text{ si } x < a \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \text{ si } x > a,$$

luego

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0,$$

es decir,

$$f'(a) \geq 0 \quad \text{y} \quad f'(a) \leq 0$$

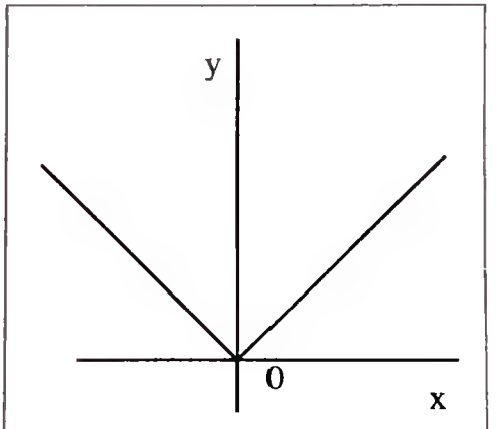
y, por consiguiente,

$$f'(a) = 0.$$

En el caso de que f tenga un mínimo en a se puede proceder de manera

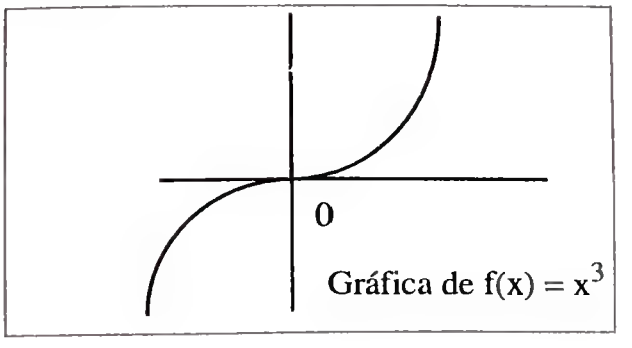
análoga, o bien se puede aplicar lo demostrado a la función -f : Si f tiene un mínimo en a entonces -f tiene un máximo en a y como -f es derivable en a (por serlo f) será -f '(a) = 0 y, por tanto, f '(a) =0.

- Una función f puede tener un máximo o un mínimo en un punto a sin que sea f '(a) = 0. Tal ocurre, por ejemplo, con la función f(x) = | x| que en a = 0 tiene un mínimo y no es f '(0) =0 puesto que f no es derivable en 0.



Gráfica de f(x) = |x|

- Pueder ser f '(a) = 0 sin que f tenga ni máximo ni mínimo en a. Un ejemplo sencillo nos lo proporciona la función $f(x) = x^3$. Como $f'(x) = 3x^2$ se tiene que f '(0) = 0. Sin embargo, f es creciente en todo intervalo que contenga al punto a = 0 y no tiene ni máximo ni mínimo en dicho punto.



Gráfica de $f(x) = x^3$

Del resultado anterior se deduce un método para determinar el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo cerrado.

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b]. Los puntos de [a, b] en los que f alcanza su máximo y su mínimo pertenecen a alguno de los tres conjuntos siguientes:

$$A = \{ x \in (a, b) : f'(x) = 0 \},\ B = \{a, b\}$$

$$C = \{ x \in (a, b) : f \text{ no es derivable en } x \}.$$

En efecto, sea x un punto de [a, b] en el que f toma su valor máximo (o mínimo). Si x no pertenece a B ni a C entonces $x \in (a, b)$ y f es derivable en x y, por la proposición anterior $f'(x) = 0$, luego $x \in A$.

- Según esta proposición, para determinar el máximo y el mínimo de una función continua f en un intervalo cerrado [a, b] basta determinar f(a), f(b) y los valores f(x) para los puntos x de (a, b) tales que $f'(x) = 0$ y para los puntos $x \in (a, b)$ en los que f no sea derivable. El mayor de todos ellos será el máximo de f en [a, b] y el menor será el mínimo.

25.1.1 Ejemplo

Determinar los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$$

en el intervalo [0, 3].

La función f es derivable en todo punto y

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

luego $f'(x) = 0$ cuando $x = 2$ y cuando $x = 4$, y como

$$f(0) = -1,\ f(2) = 19,\ f(3) = 17,$$

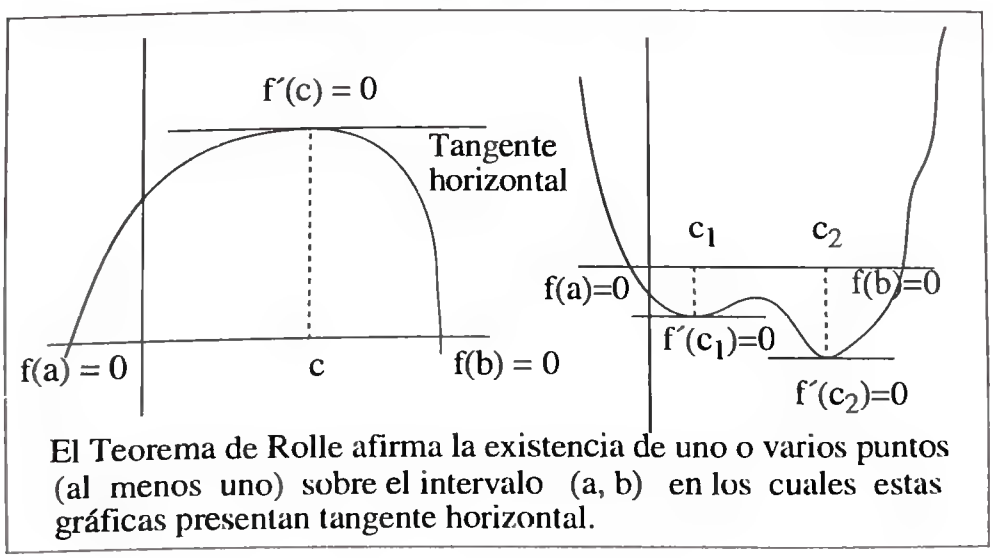
el máximo de f en [0, 3] es 19 y se alcanza en $x = 2$, el mínimo es -1 y se alcanza en $x = 0$. (Obsérvese que hemos descartado el punto x=4 en el cual $f'(x) = 0$ pero dicho punto no pertenece al intervalo (0, 3)).

25.2 Los Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$



El Teorema de Rolle afirma la existencia de uno o varios puntos (al menos uno) sobre el intervalo (a, b) en los cuales estas gráficas presentan tangente horizontal.

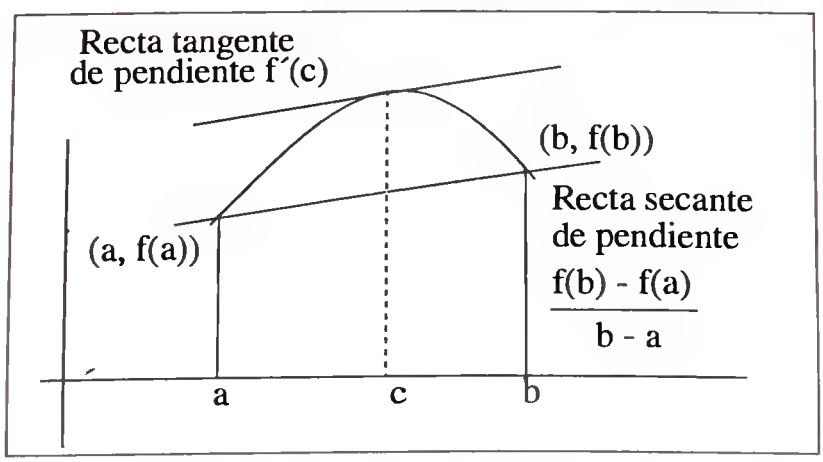
La demostración de este importante teorema es como sigue:

Como f es continua en [a, b], por el teorema de Weierstrass, f tiene un máximo y un mínimo en [a, b]. Si el máximo se alcanza en un punto $c \in (a, b)$, como f es derivable en c, será $f'(c) = 0$. Análogamente, si el mínimo se alcanza en un punto $c \in (a, b)$ es $f'(c) = 0$. En otro caso, el máximo y el mínimo de f se alcanzan en los extremos del intervalo, y como $f(a) = f(b)$ el máximo y el mínimo de f en [a, b] son iguales, luego f es una función constante en [a, b] y, por tanto, $f'(c) = 0$ para cualquier $c \in (a, b)$.

Teorema del valor medio

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



En efecto, sea g la función definida en [a, b] por

$$g(x) = (b - a)\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, x$$

para cada x de [a, b]. Entonces g es continua en [a, b] por ser diferencia de funciones continuas. También es derivable en (a, b) por ser diferencia

de funciones derivables. Además,

$$g(a) = b\,f(a) - a\,f(b) = g(b)$$

luego g verifica las hipótesis del Teorema de Rolle y, en consecuencia , existe un $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Pero

$$g'(c) = (b - a)\,f'(c) - [f(b) - f(a)]$$

y como $g'(c) = 0$, resulta

$$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$$

que es justo lo que queríamos demostrar.

Del teorema del valor medio se deducen varios e importantes resultados:

> Si f es derivable en un intervalo abierto I y $f'(x) = 0$ para todo x de I entonces f es constante en I.

En efecto, sean a y b dos puntos arbitrarios de I y supongamos que $a < b$. El intervalo [a, b] está contenido en I, luego f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y, por el teorema del valor medio, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y como $c \in I$ es $f'(c) = 0$ y, por tanto, $f(b) - f(a) = 0$, es decir, $f(b) = f(a)$.

Si f y g son derivables en un intervalo abierto I y f '(x) = g'(x) en todo punto x de I entonces la función f - g es constante en I.

Esto es consecuencia inmediata del resultado anterior pues la función f - g es derivable en I y

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

en todo punto x de I.

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I. Si f'(x) > 0 en todo punto x de I entonces f es creciente en I. Si f '(x) < 0 en todo punto x de I entonces f es decreciente en I.

Supongamos en primer lugar que f '(x) > 0 en todo punto x de I. Probaremos que f(a) < f(b) cualesquiera que sean los puntos a y b de I tales que a < b.

Por el teorema del valor medio existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y como f '(c) >0 y b - a >0 , también f(b) - f(a) > 0, es decir, f(a) < f(b).

En el caso en que sea f '(x) <0 en todo x de I se puede proceder de manera análoga o bien, se puede aplicar todo lo ya probado a la función -f: Si f '(x) < 0 en todo x de I entonces -f '(x) >0 en todo x de I, luego -f es creciente en I y, por tanto, f es decreciente en I.

Un teorema muy útil en el cálculo de límites es el conocido con el nombre de **Regla de l' Hôpital** y establece que si dos funciones

derivables tienen por límite cero (o infinito), el límite del cociente es igual al límite del cociente de sus derivadas cuando este último existe. Con más precisión:

Regla de l' Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b) donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Entonces , si

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$$

o si

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty,$$

se verifica

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

También es cierto un enunciado análogo cuando $x \to b$ o cuando

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty.$$

25.2.1 Ejemplos

a) Sean m y n dos números naturales. El límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

puede calcularse aplicando la Regla de l' Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} \quad .$$

b) Aplicando la Regla de l' Hôpital resulta

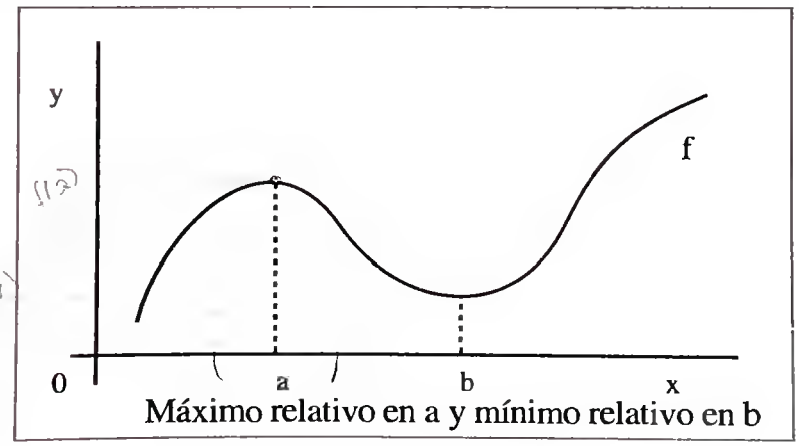
$$\lim_{x \to 3+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to 3+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}} = \lim_{x \to 3+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x\sqrt{x}} = 0 .$$

c) Algunas veces hay que aplicar dos o más veces la Regla de l' Hôpital para calcular un límite, Así por ejemplo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 - 2x + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 1}{6x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} .$$

25.3 Máximos y mínimos relativos

Se dice que una función f definida en un subconjunto A de la recta real **R** tiene un *máximo relativo* (respectivamente un *mínimo relativo*) en un punto $a \in A$ cuando existe un $\delta > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ (respectivamente , $f(a) \leq f(x)$) para todo $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$.



Máximo relativo en a y mínimo relativo en b

Como caso particular del resultado 25.1 resulta

Si una función f definida en un intervalo abierto tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto a de dicho intervalo y f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

- Una función f puede tener un máximo o un mínimo relativo en un punto a sin que sea $f'(a) = 0$. También puede ser que $f'(a) = 0$ sin que f tenga ni máximo ni mínimo relativo en a. Los mismos ejemplos dados en 25.1 demuestran estas afirmaciones.

Sean $a \in \mathbf{R}$ y f una función con derivada positiva en un intervalo a la izquierda de a y negativa en un intervalo a la derecha de a. Entonces f tiene un máximo relativo en a. Análogamente, si f tiene derivada negativa en un intervalo a la izquierda de a y derivada positiva en un intervalo a la derecha de a entonces f tiene un mínimo relativo en a.

En efecto, en el primer caso existe un $\delta > 0$ tal que f es creciente en $(a - \delta, a)$ y decreciente en $(a , a + \delta)$, por tanto, $f(x) \leq f(a)$ en todo punto x de $(a - \delta, a + \delta)$ y f tiene un máximo relativo en a. En el segundo, existe un $\delta > 0$ tal que f es decreciente en $(a - \delta, a)$ y creciente en $(a, a + \delta)$ luego $f(x) \geq f(a)$ en todo punto x de $(a - \delta, a + \delta)$ y f tiene un mínimo relativo en a.

25.3.1 Ejemplo

La derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x$ es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Esta derivada se anula para $x = -1$ y para $x = 1$. Para $x < -1$ es $f'(x) > 0$, Para $-1 < x < 1$ es $f'(x) < 0$. Para $x > 1$ es $f'(x) > 0$. Por consiguiente, f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Sea f una función dos veces derivable en un punto a y supongamos que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en a. Si $f''(a) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en a.

Como $f'(a) = 0$ se tiene

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a} .$$

Supongamos que $f''(a) > 0$. Entonces existirá un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f'(x)}{x - a} > 0 \text{ para todo } x \neq a \text{ de } (a - \delta, a + \delta)$$

y, por tanto,

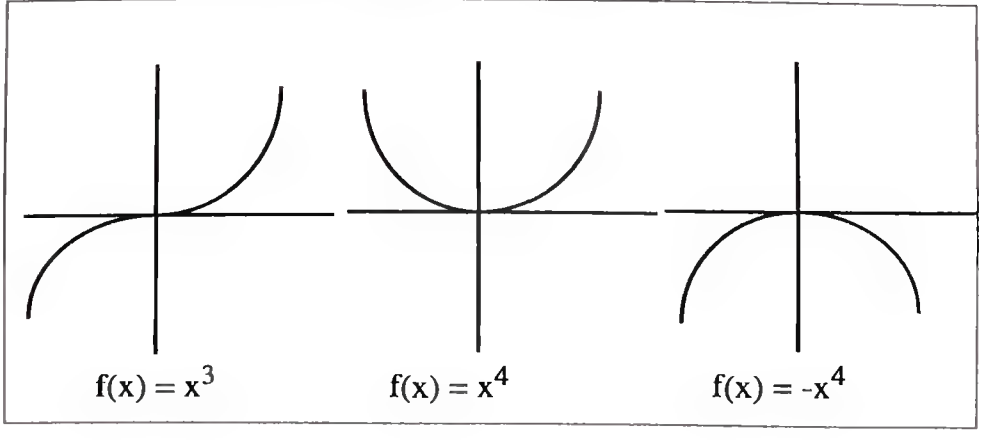
$$f'(x) < 0 \text{ para } x \text{ en } (a - \delta, a) \text{ y } f'(x) > 0 \text{ para } x \text{ en } (a, a + \delta)$$

y por el resultado anterior, f tiene un mínimo relativo en a. El otro caso se trata de forma análoga.

• La aplicación del criterio de la segunda derivada para la determinación de máximos y mínimos se hace penosa cuando la derivada segunda es complicada, lo que ocurre con relativa frecuencia. Además si $f''(a) = 0$, el criterio de la derivada segunda no proporciona ninguna información. Puede ocurrir que f tenga en a un máximo relativo, un mínimo relativo o que no tenga ni máximo ni mínimo: Las funciones

$$f(x) = x^3 \ , \ f(x) = x^4 \ , f(x) = -x^4$$

verifican $f'(0) = f''(0) = 0$; la primera no tiene ni máximo ni mínimo en $x = 0$, la segunda tiene un mínimo y la tercera un máximo.



En estos casos, los máximos y mínimos se determinan estudiando el signo de la derivada primera.

25.3.2 Ejemplo

Sea $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$. Entonces

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 \quad y \quad f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x$$

y $f'(x) = 0$ para $x = 0$, para $x = 3/5$ y para $x = 1$. Como $f''(3/5) = -18/25 < 0$, f tiene un máximo relativo en $x = 3/5$. Como $f''(1) = 2 > 0$, f tiene un mínimo relativo en $x = 1$. El criterio de la derivada segunda no proporciona ninguna información en $x = 0$ pues $f''(0) = 0$. Como para $x < 0$ es $f'(x) > 0$ y para $0 < x < 3/5$ es $f'(x) > 0$, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 3/5)$ y, por tanto, no tiene máximo ni mínimo en $x = 0$.

25.4 Concavidad y convexidad

Se dice que una función es *convexa* en un intervalo abierto I cuando, cualesquiera que sean los puntos a y b de I y para todo t tal que $0 < t < 1$ se verifica

$$f(ta + (1 - t)b) < tf(a) + (1 - t)f(b).$$

Se dice que f es *cóncava* en I cuando se verifica la desigualdad opuesta.

- Obsérvese que f es cóncava en I si y sólo si -f es convexa en I.

Antes de seguir adelante, vamos a dar una interpretación geométrica de la convexidad:

Sea f una función convexa en un intervalo abierto I y sean a y b dos puntos de I tales que $a < b$. La recta que une los puntos (a, f(a)), (b, f(b)) de la gráfica de f es la gráfica de la función

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Pongamos $x = ta + (1\text{-}t)b$. Cuando t varía entre 0 y 1, el punto x recorre el intervalo (a, b), y como

$$g(x) = g(ta + (1\text{-}t)b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(1 - t)(b - a)$$

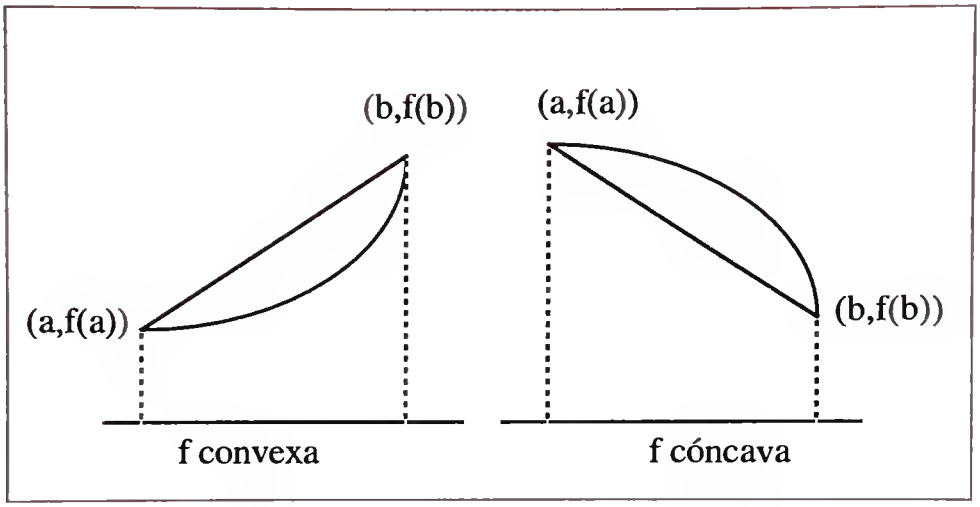
$$= t\,f(a) + (1\text{-}t)\,f(b),$$

la desigualdad de convexidad se puede escribir

$$f(x) < g(x) \text{ para todo } x \in (a, b)$$

y esto significa que la gráfica de f queda por debajo de la gráfica de g en el intervalo (a, b).

Por consiguiente, si una función es convexa en un intervalo abierto I entonces, cualesquiera que sean los puntos a y b de I, la gráfica de f queda por debajo del segmento rectilíneo que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) de la gráfica de f. Para una función cóncava ocurre lo contrario.



Sea f una función derivable en un intervalo abierto I. Si f ' es creciente en I entonces f es convexa en I. Si f ' es decreciente en I entonces f es cóncava en I.

En efecto, supongamos en primer lugar que f ' es creciente en I. Sean a y b dos puntos cualesquiera de I tales que $a < b$ y sea $x = ta + (1 - t)b$ donde $0 < t < 1$. Queremos probar que

$$f(x) < t\, f(a) + (1 - t)\, f(b).$$

Esto es lo mismo que

$$tf(x) + (1 - t)f(x) < t\, f(a) + (1 - t)\, f(b).$$

o bien que,

$$t\,(f(x) - f(a)) < (1 - t)\,(f(b) - f(x)).$$

Ahora bien, el teorema del valor medio aplicado a f en los intervalos

[a, x] y [x, b] asegura la existencia de puntos $c \in (a, x)$ y $d \in (x, b)$ tales que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \quad y \quad f(b) - f(x) = f'(d)(b - x).$$

Pero $f'(c) < f'(d)$ por ser f' creciente, y como

$$t(x - a) = (1 - t)(b - x),$$

se tiene

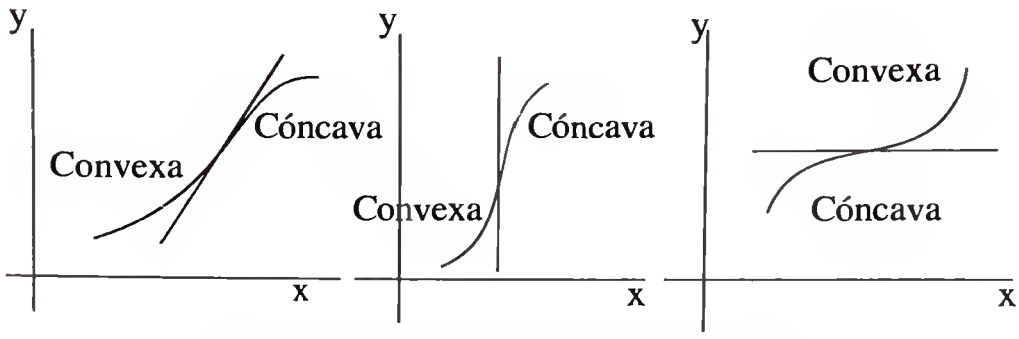
$$t(f(x) - f(a)) = tf'(c)(x - a) < (1 - t)f'(d)(b - x) = (1 - t)(f(b) - f(x))$$

que demuestra el resultado.
En el caso de que f' sea decreciente en I se puede proceder de forma análoga.

Si f es una función con derivada segunda positiva (respectivamente, negativa) en un intervalo abierto I entonces f es convexa (respectivamente, cóncava) en I.

Es consecuencia inmediata del resultado anterior puesto que si f'' es positiva en I entonces f' es creciente en I, y si f'' es negativa en I entonces f' es decreciente en I.

Los puntos x en los que una función continua f pasa de cóncava a convexa o viceversa se llaman *puntos de inflexión* de f.



Ejemplos de tipos de puntos de inflexión

25.5 Asíntotas

A veces, la gráfica de una función cuando se aleja del origen de coordenadas se aproxima a una recta. Estas rectas que se confunden con la gráfica se llaman asíntotas.

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical de* f *a la izquierda* (respectivamente *a la derecha*) de a cuando $\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$ (respectivamente $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$).

25.5.1 Ejemplo

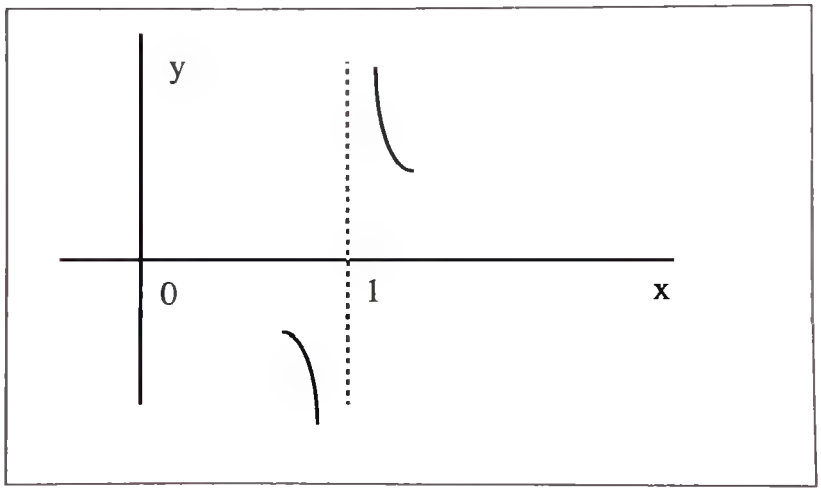
La recta x=1 es asíntota vertical (por la izquierda y por la derecha) de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

puesto que

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty .$$

Estos valores nos dan una idea de cómo es la gráfica de la función f en los puntos próximos a 1



La recta y =b es una *asíntota horizontal* de f cuando

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad o \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

25.5.2 Ejemplo

La recta y = 2 es asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}$$

puesto que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$. Para determinar la posición de la gráfica respecto de esta asíntota se estudia el signo de la diferencia

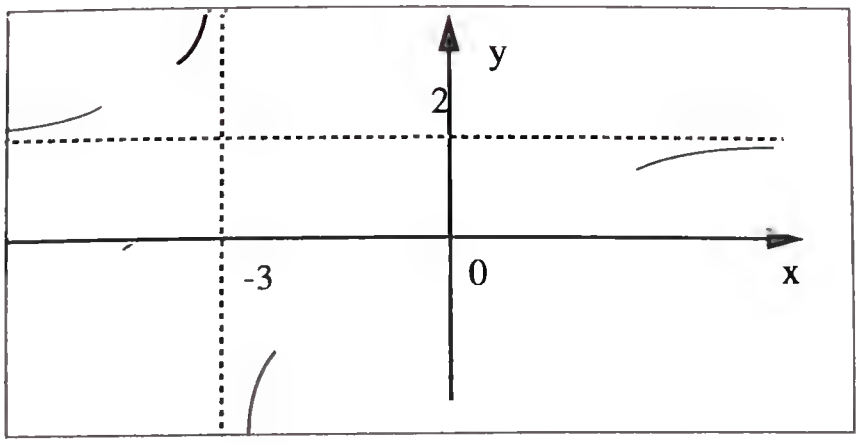
$$f(x) - 2 = \frac{2x}{x+3} - 2 = \frac{2x - 2x - 6}{x+3} = \frac{-6}{x+3}$$

que es positiva para $x < -3$ y negativa para $x > -3$. Esto nos dice que la gráfica de f está por encima de la asíntota en el intervalo $(-\infty, -3)$ y por debajo de ella en $(-3, +\infty)$.

Obsérvese que esta función también tiene la asíntota vertical $x = -3$ pues

$$\lim_{x \to -3-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -3+} f(x) = -\infty.$$

La obtención de estas dos asíntotas nos proporciona la información sobre la gráfica de f que se refleja en la figura:



La recta $y = ax + b$ (con $a \neq 0$) es *asíntota oblícua* de f cuando

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

ó cuando

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

Los coeficientes a y b de la asíntota se determinan de la misma forma en cualquiera de los dos casos. Veámoslo, por ejemplo, en el caso

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

En este caso,

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$$

y como $\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$, habrá de ser

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

y esta fórmula nos da el valor de a. Conocido ya el valor de a el cálculo de b es inmediato:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

25.5.3 Ejemplo

Volvamos a considerar la función del ejemplo 25.5.1,

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

y

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

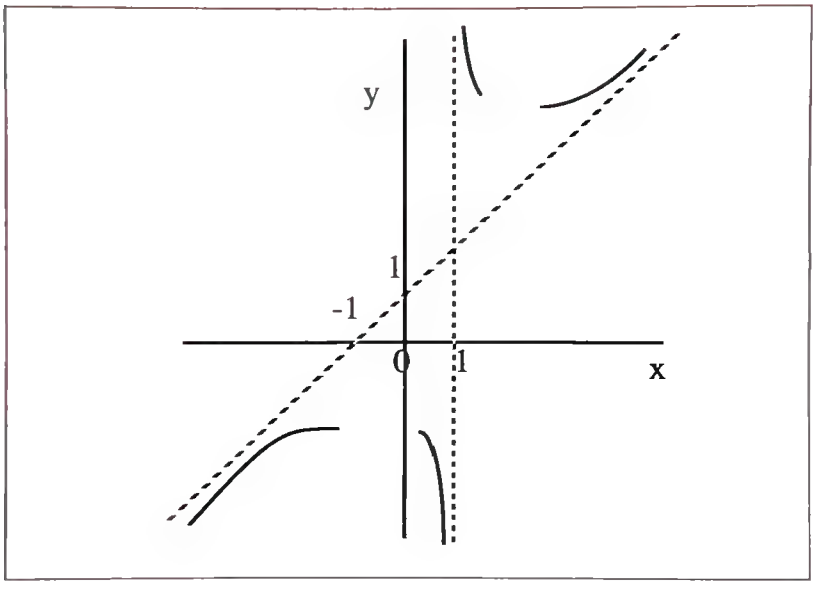
la recta $y = x + 1$ es asíntota oblícua de f.

Para determinar la posición de la gráfica respecto de esta asíntota se estudia el signo de la diferencia

$$f(x) - (x+1) = \frac{x^2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

que es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. Por tanto, la gráfica de f está por debajo de la asíntota en $(-\infty, 1)$ y por encima en $(1, +\infty)$.

Antes hemos visto que la recta $x = 1$ también es asíntota de f y la información que hemos obtenido sobre la gráfica de f con las dos asíntotas es la que se refleja en la figura siguiente



Estudiando el crecimiento y la convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

completaremos el trazado de su gráfica.

Como para $x \neq 1$ es

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

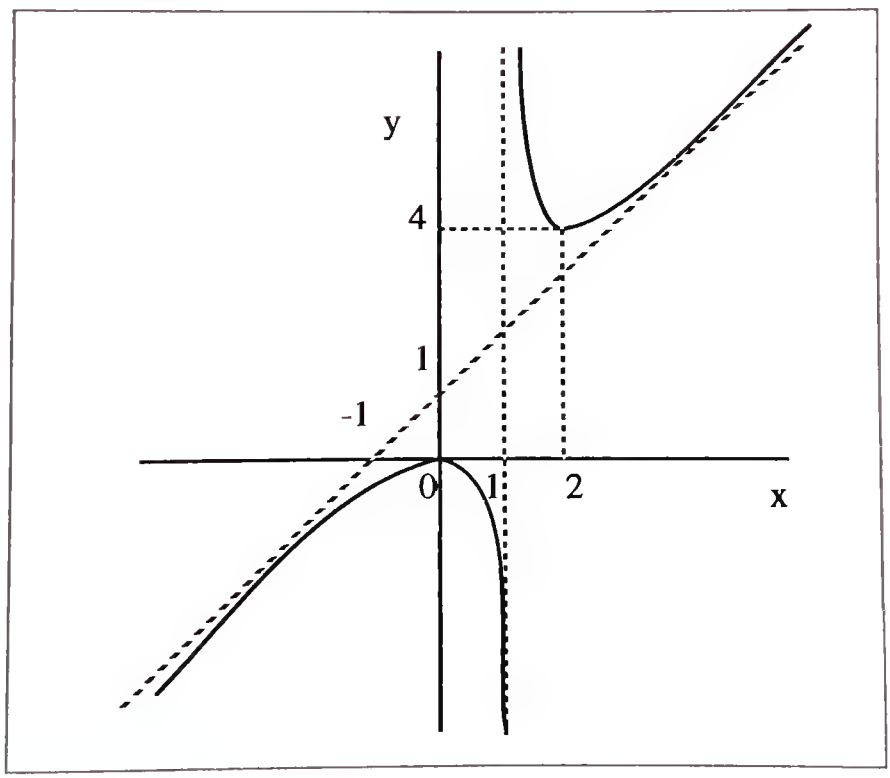
se tiene $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y para $x = 2$ y $f'(x)$ es positiva y f creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ y $f'(x)$ es negativa y f es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$, luego f tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$. Además, $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$.

Por otra parte, como para $x \neq 1$ es

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3},$$

se tiene $f''(x) < 0$ para $x < 1$ y $f''(x) > 0$ para $x > 1$, luego f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1,+\infty)$.

Con todos estos datos podemos dibujar la gráfica de f con bastante precisión.



25.6 Ejercicios

1.- Determinar los valores máximo y mínimo de las funciones siguientes en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $[0, 4]$.

b) $g(x) = x^3 + 3x - 7$ en $[-1, 1]$.

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ en $[0, 2]$

2.- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

3.- Aplicar el teorema del valor medio para calcular

$$\lim_{x \to +\infty} [\,(x+1)^{2/3} - x^{2/3}\,].$$

4. - Aplicar la regla de l' Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

b) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$.

5. - Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 3}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

c) $f(x) = \sqrt{x\,(x + 1)}$.

TEMA 26

Funciones trigonométricas

Hasta ahora hemos manejado senos, cosenos y tangentes de distintos ángulos y hemos probado algunas identidades trigonométricas. En este tema vamos a estudiar las funciones seno, coseno y tangente desde el punto de vista analítico (continuidad, derivabilidad y trazado de sus gráficas), así como sus funciones inversas arco seno arco coseno, y arco tangente.

26.1 Funciones periódicas. Las funciones seno y coseno

Si p es un número real positivo, una función se llama *función periódica de periodo p* cuando

$$f(x + p) = f(x)$$

para todo punto x de su dominio de definición.

Cambiando x por x - p la condición de periodicidad se escribe

$$f(x) = f(x - p).$$

Por inducción resulta que si f es una función periodica de periodo p entonces, cualquiera que sea el número natural n y para todo x del

dominio de definición de f se cumplen

$$f(x + np) = f(x) \quad y \quad f(x - np) = f(x).$$

Por consiguiente, $f(x + np) = f(x)$ para todo número entero n y para todo x del dominio de definición de f. (Obsérvese que implícitamente,se afirma que si f está definida en x también lo está en $x + np$).

26.1.1 Ejemplos

1. Para cada $x \in \mathbf{R}$ sea $[x]$ la *parte entera* de x, es decir, el mayor número entero que es menor o igual que x :

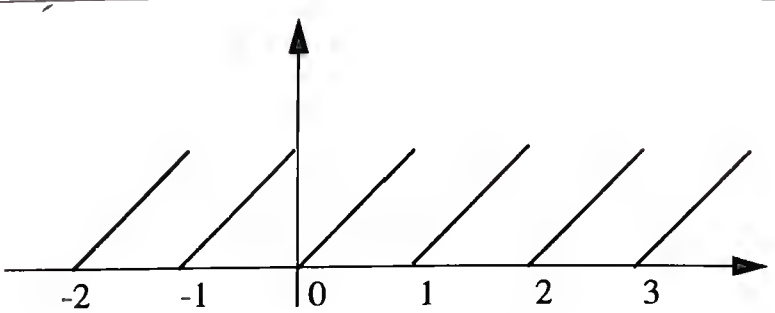
$$[x] = k \text{ si y sólo si } k \in \mathbf{Z} \text{ y } k \leq x < k+1.$$

La función $f(x) = x - [x]$ es una función periódica de periodo 1 pues $[x + 1] = [x] + 1$ y por tanto,

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x)$$

para todo $x \in \mathbf{R}$.

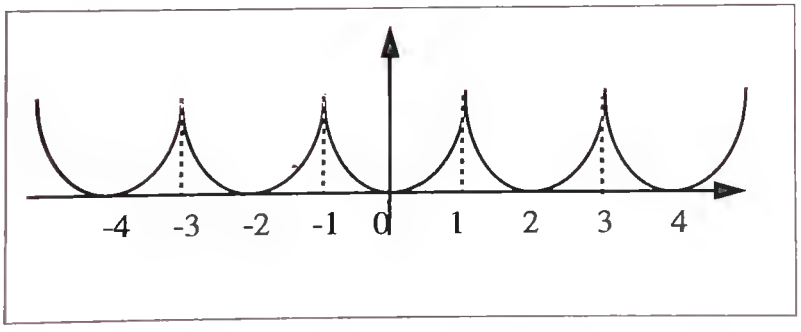
La gráfica de esta función es la de la figura:



Gráfica de la función $f(x) = x - [x]$

Para dibujar esta gráfica hemos procedido así: en el intervalo [0, 1), [x] = 0 y f(x) = x; en el intervalo [1, 2), [x] = 1 y f(x) = x -1; en el intervalo [2, 3), [x] = 2 y f(x) = x - 2; etcétera. En el intervalo [-1, 0), [x] = -1 y f(x) = x + 1; en el intervalo [-2, -1), [x] = -2 y f(x) = x + 2, etcétera. Y por último hemos dibujado la gráfica " trozo a trozo". Sin embargo, es más sencillo y mucho más corto dibujar la gráfica en el intervalo [0, 1) y "repetir" el dibujo trasladándolo a derecha e izquierda en cada uno de los intervalos [1, 2), [2, 3),etc, [-1, 0), [-2, -1), etc.

2. Para dibujar la gráfica de la función periódica de periodo 2 definida para cada $x \in [-1, 1)$ por $f(x) = x^2$, la dibujamos en el intervalo [-1, 1) y después trasladamos el dibujo a derecha e izquierda en los sucesivos intervalos de longitud 2 igual al periodo: [1, 3), [3, 5), etc., y [-3, -1), [-5, -3), etc:



Vamos a considerar ahora las funciones seno y coseno, es decir, las funciones que a cada número real x hacen corresponder, respectivamente, los números sen x y cos x. Sabemos ya que dichas funciones son periódicas de periodo 2π. Bastará pues dibujar las gráficas en un intervalo de longitud 2π , por ejemplo el $[0, 2\pi)$ y extenderlas después por periodicidad.

Ya conocemos también los valores exactos de sen x para dieciséis puntos x del intervalo $[0, 2\pi)$. Estos valores nos proporcionan dieciséis puntos de la gráfica de la función f(x) = sen x. Son éstos:

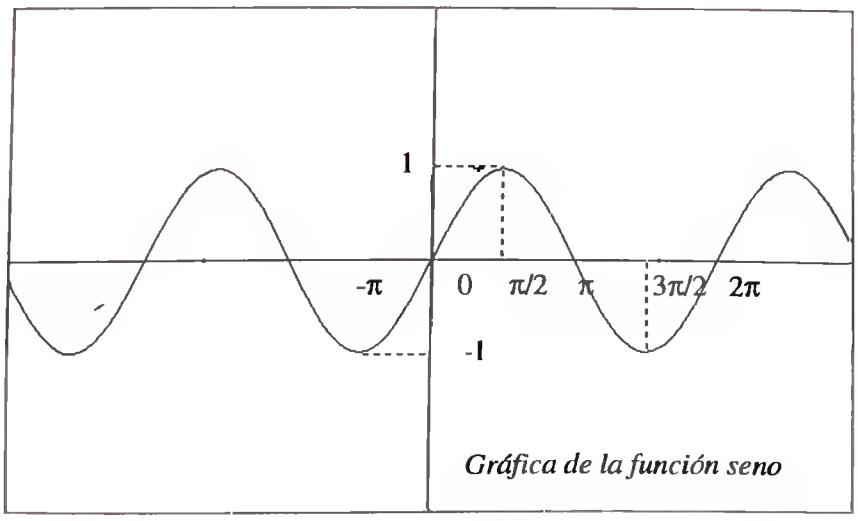
$$(0,0) \quad \left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2},1\right) \quad \left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$$

$$(\pi,0) \quad \left(\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

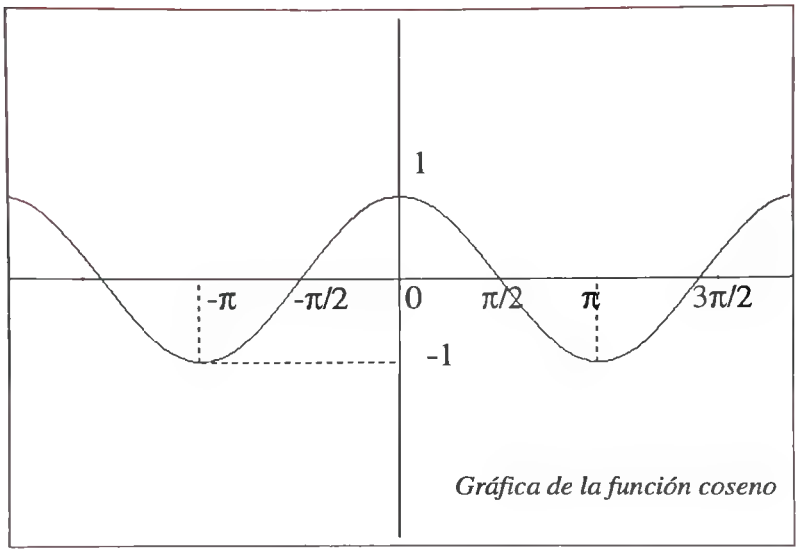
$$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right) \quad \left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(\frac{7\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\frac{11\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$$

Representando estos puntos en un sistema de ejes coordenados y uniéndolos con trazo continuo (enseguida veremos que la función seno es continua), nos podemos hacer una idea del aspecto de la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. El resto de la gráfica se obtiene por periodicidad:



Gráfica de la función seno

Procediendo de manera análoga con la función coseno se obtiene con una cierta aproximación la gráfica de $f(x) = \cos x$:



Gráfica de la función coseno

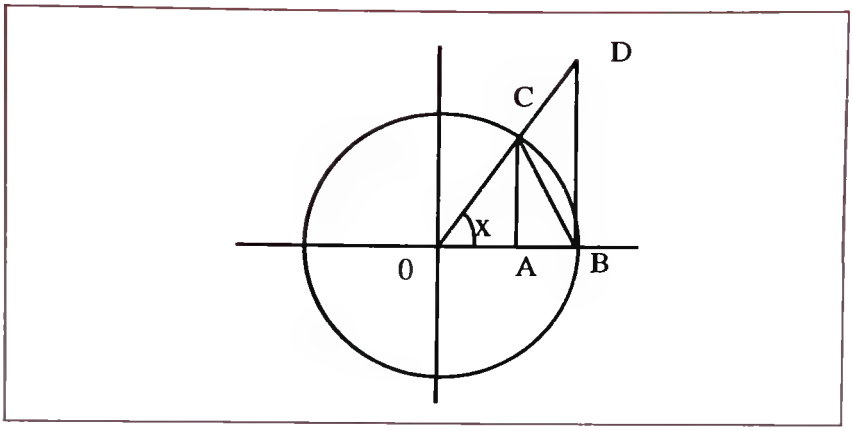
Una vez tengamos las derivadas de las funciones seno y coseno, podremos hacer un estudio analítico más preciso para deducir las propiedades de crecimiento y de convexidad de estas funciones.

26.2 Continuidad de las funciones seno y coseno

En este apartado vamos a probar que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Para ello, consideramos la figura siguiente en la que hemos dibujado la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1 y un ángulo BOC de x radianes ($0 < x < \pi/2$).



Evidentemente se cumplen las desigualdades

$$0 < \text{área triángulo OBC} < \text{área sector OBC.}$$

Ahora bien, el área del triángulo OBC es

$$\frac{OB \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

y para calcular el área del sector circular OBC procedemos así: El sector de 2π radianes (el círculo entero) tiene por área $\pi r^2 = \pi$, luego un sector de 1 radián tiene por área $\pi/2\pi = 1/2$ y el sector de x radianes tendrá por área x/2. Con esto, las desigualdades anteriores se escriben

$$0 < \frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2}$$

y multiplicando por 2 resultan

$$0 < \operatorname{sen} x < x$$

y como $\lim_{x \to 0+} x = 0$, se deduce $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sen} x = 0$.

El límite cuando x tiende a cero por la izquierda se obtiene ahora haciendo el cambio de variable $x = -y$:

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sen} x = \lim_{y \to 0+} \operatorname{sen}(-y) = \lim_{y \to 0+} -(\operatorname{sen} y) =$$
$$= -\lim_{y \to 0-} \operatorname{sen} y = 0.$$

Queda pues demostrado que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Como consecuencia resulta que

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

En efecto, por ser continua la función raíz cuadrada se tiene

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1.$$

Ahora ya podemos probar la continuidad de las funciones seno y coseno.

Las funciones sen y cos son continuas en todo punto $a \in \mathbf{R}$

Tenemos que probar que para todo $a \in \mathbf{R}$ se cumplen

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a \ ,$$

o equivalentemente (haciendo el cambio $x = a + h$),

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \cos(a + h) = \cos a \ .$$

Ahora bien, como

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h$$

y

$$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} h,$$

se tiene

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \lim_{h \to 0} \cos h + \cos a \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h =$$

$$= \operatorname{sen} a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 = \operatorname{sen} a$$

y

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \cos a \lim_{h \to 0} \cos h - \operatorname{sen} a \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h =$$

$$= \cos a \cdot 1 - \operatorname{sen} a \cdot 0 = \cos a$$

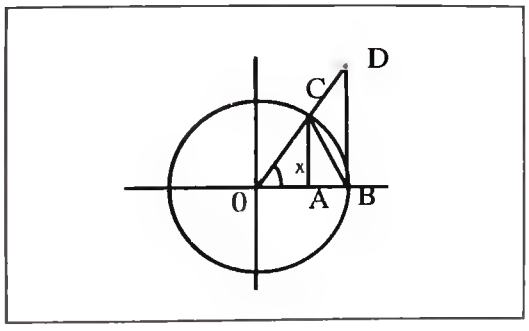
conforme queríamos demostrar.

26.3 Derivabilidad de las funciones seno y coseno

Ya sabemos que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Por tanto el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

no se puede calcular directamente ya que presenta una indeterminación de la forma 0/0. Para calcularlo, consideremos de nuevo la figura



De ella se deducen las desigualdades

área triángulo OBC < área sector OBC < área triángulo OBD

y como por semejanza de triángulos, es

$$\frac{BD}{AC} = \frac{OB}{OA},$$

se tiene que

$$BD = \frac{OB \cdot AC}{OA} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

luego el área del triángulo OBD es

$$\frac{OB \cdot BD}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y las desigualdades anteriores nos dan

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Multiplicando ahora por 2 y dividiendo por senx (que es mayor que cero) resultan

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

y por ser

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1,$$

también es

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{y \to 0+} \frac{-y}{\text{sen}(-y)} = \lim_{y \to 0+} \frac{y}{\text{sen } y} = 1.$$

Por consiguiente

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1.$$

Las funciones sen y cos son derivables y

$$\text{sen}'x = \cos x \text{ y } \cos'x = -\text{sen}x$$

para todo $x \in \mathbf{R}$.

En efecto, para $h \neq 0$ y todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \frac{\text{sen}x\cosh + \cos x\text{sen}h - \text{sen}x}{h} =$$

$$= (\text{sen}x) \cdot \frac{\cosh - 1}{h} + (\cos x) \cdot \frac{\text{sen}h}{h}$$

y como

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cosh - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2\text{sen}^2(h/2)}{h} == \lim_{h \to 0} (-\frac{h}{2}) \cdot \frac{\text{sen}^2(h/2)}{h^2/4} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-\frac{h}{2}) \cdot (\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2})^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{h}{\operatorname{sen} h}}=\frac{1}{1}=1$$

resulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=(\operatorname{sen} x)\cdot 0+(\cos x)\cdot 1=\cos x.$$

Análogamente, como

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h}=$$

$$=(\cos x)\cdot\frac{\cos h-1}{h}-(\operatorname{sen} x)\cdot\frac{\operatorname{sen} h}{h},$$

se deduce

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=(\cos x)\cdot 0-(\operatorname{sen} x)\cdot 1=-\operatorname{sen} x.$$

Utilicemos ahora las derivadas para estudiar la forma de la gráfica.

Por ser $\operatorname{sen}'(x)=\cos x$ y $\cos x>0$ en $(0,\pi/2)$ y en $(3\pi/2,2\pi)$ y $\cos x<0$ en $(\pi/2,3\pi/2)$ la función sen crece en $[0,\pi/2]$ desde $\operatorname{sen} 0=0$ hasta $\operatorname{sen}(\pi/2)=1$, decrece en $[\pi/2,3\pi/2]$ desde $\operatorname{sen}(\pi/2)=1$ hasta $\operatorname{sen}(3\pi/2)=-1$ y crece en $[3\pi/2,2\pi]$ desde $\operatorname{sen}(3\pi/2)=-1$ hasta $\operatorname{sen} 2\pi=0$. En $x=\pi/2$ alcanza pues un máximo y en $x=3\pi/2$ un mínimo.

Por ser $\operatorname{sen}''(x)=-\operatorname{sen} x$ es $\operatorname{sen}''(x)<0$ en $(0,\pi)$ y $\operatorname{sen}''(x)>0$ en $(\pi,2\pi)$, luego la función sen es cóncava en $(0,\pi)$ y convexa en $(\pi,2\pi)$ y en el punto $x=\pi$ tiene un punto de inflexión.

De manera análoga se puede estudiar el crecimiento y la convexidad de la función cos en el intervalo $[0,2\pi]$.

26.4 Las funciones tangente y cotangente

Las funciones *tangente* y *cotangente* , que se designan respectivamente por tg y ctg, son las funciones definidas por

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \text{ para } x \neq k\pi + \pi/2 \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

y

$$\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\text{sen}x} \text{ para } x \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

Las funciones tg y ctg son periódicas de periodo π

Para comprobar esto, basta tener en cuenta que

$$\text{sen}(x+\pi) = \text{sen}x \cos\pi + \cos x \text{sen}\,\pi = -\text{sen}x$$

y

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos\pi - \text{sen}x \text{ sen}\pi = -\cos x$$

Las funciones tg y ctg son derivables en todo punto en el que están definidas y

$$\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ para } x \neq k\pi + \pi/2 \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

y

$$\text{ctg}'(x) = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} \text{ para } x \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

Estas importantes fórmulas se obtienen mediante la regla de derivación del cociente

$$\text{tg}'(x) = \frac{\text{sen}'(x)\cos x - \cos'(x)\text{sen}x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{ctg}'(x) = \frac{\cos'(x)\text{sen}x - \cos x \,\text{sen}'(x)}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$$

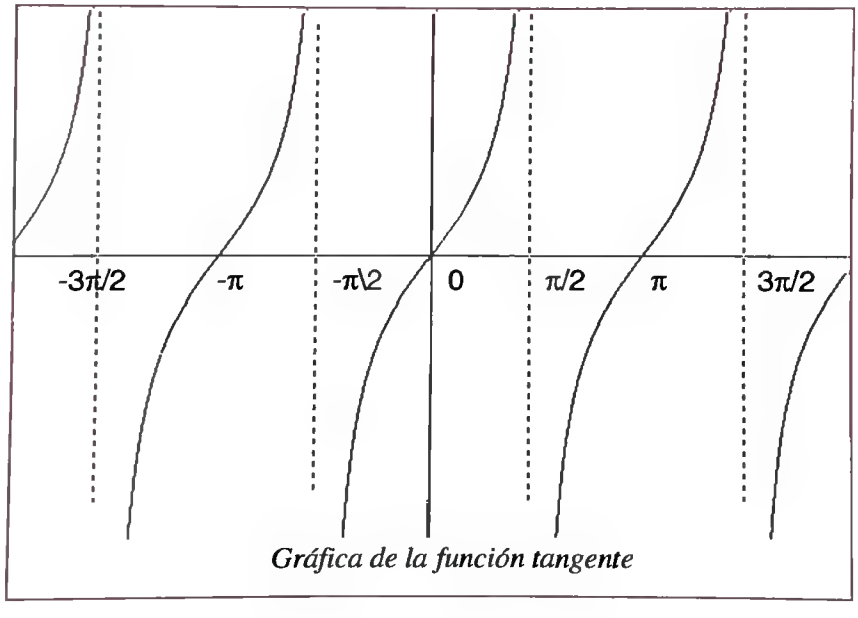
Dibujaremos la gráfica de tg en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y la extenderemos por periodicidad.

Como

$$\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

la función tangente es creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$.

Por otra parte, cuando x tiende a $-\pi/2$ por la derecha senx tiende a -1 y cosx tiende a 0 tomando valores positivos , luego $\lim_{x \to -\pi/2+} tgx = -\infty$ y cuando x tiende a $\pi/2$ por la izquierda, senx tiende a 1 y cosx tiende a 0 tomando valores positivos, luego $\lim_{x \to \pi/2-} tgx = +\infty$.



Gráfica de la función tangente

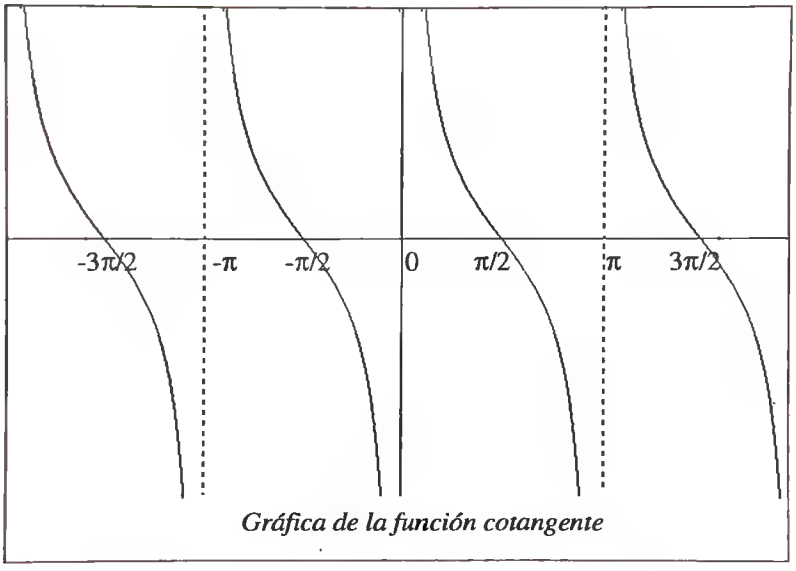
Análogamente , la gráfica de ctg la dibujaremos en el intervalo $(0, \pi)$ extendiéndola también por periodicidad.

Como

$$ctg'(x) = -\frac{1}{sen^2 x} < 0$$

la función cotangente es decreciente en $(0, \pi)$. Además,

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty \text{ y } \lim_{x \to \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$



Gráfica de la función cotangente

26.5 Las funciones arco seno, arco coseno, arco tangente

La función f: $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es biyectiva (por ser creciente es inyectiva, y por ser continua y ser $f(-\pi/2) = -1$ y $f(\pi/2) = 1$, por el teorema de los valores intermedios, f toma cualquier valor comprendido entre -1 y 1 es, por tanto, suprayectiva). Su función inversa f^{-1} se designa por arcsen y se llama *función arco seno*.

Así pues, la función arcsen está definida en el intervalo [-1, 1] y toma valores en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$,Además, por ser $f(x) = \operatorname{sen} x$ continua y creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, es $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ continua y creciente en [-1,1]. Por ser $f(x) = \operatorname{sen} x$ derivable y

$$f'(x) = \cos x \neq 0 \text{ en } (-\pi/2, \pi/2),$$

es $f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$ derivable en $(-1,1)$ y

$$\text{arc sen}'(x) = (f^{-1})'(x) = [f'(f^{-1}(x)]^{-1} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}x)}$$

y por ser

$$[\text{sen}(\text{arcsen } x)]^2 + [\cos(\text{arcsen } x)]^2 = 1$$

es

$$x^2 + [\cos(\text{arcsen } x)]^2 = 1,$$

y como $\text{arcsen } x \in (-\pi/2, \pi/2)$ es $\cos(\text{arcsen}x) > 0$ y, por tanto,

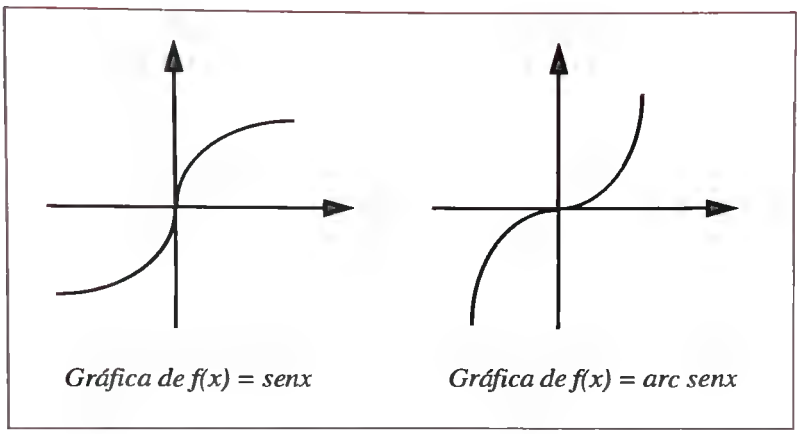
$$\cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1 - x^2},$$

luego

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para cada $x \in (-1,1)$.

Las gráficas de $f(x) = \text{sen}x$ y de $f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$ son simétricas respecto de la recta $y = x$:



Gráfica de f(x) = senx *Gráfica de f(x) = arc senx*

Veamos ahora la gráfica de la función arccos x.

La función $g:[0, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $g(x) = \cos x$ es biyectiva (por ser decreciente y continua y ser $g(0) = 1$ y $g(\pi) = -1$). Su función inversa g^{-1} se designa por arc cos y se llama función *arco coseno*.

Así pues, la función arccos está definida en el intervalo $[-1, 1]$ y toma valores en $[0, \pi]$. Además

$$\arccos x = y \text{ si y sólo si } \cos y = x.$$

Por ser $g(x) = \cos x$ continua y decreciente en $[0, \pi]$ es $g^{-1}(x) = \arccos x$ continua y decreciente en $[-1, 1]$. Por ser $g(x) = \cos x$ derivable y

$$g'(x) = -\operatorname{sen} x \neq 0 \text{ en } (0, \pi)$$

es $g^{-1}(x) = \arccos x$ derivable en $(-1, 1)$ y

$$\arccos'(x) = (g^{-1})'(x) = [g'(g^{-1}(x))]^{-1} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)}$$

y por ser

$$[\operatorname{sen}(\arccos x)]^2 + [\cos(\arccos x)]^2 = 1$$

es

$$[\,\text{sen}(\arccos x)]^2 + x^2 = 1$$

y como $\arccos x \in (0, \pi)$ es $\text{sen}\,(\arccos x) > 0$ y, por tanto,

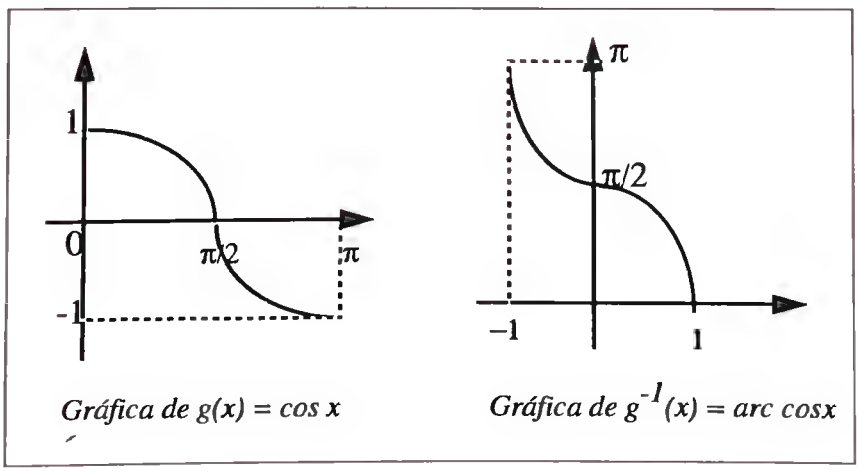
$$\text{sen}\,(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

luego

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Las gráficas de $g(x) = \cos x$, y de $g^{-1}(x) = \arccos x$ son simétricas respecto de la recta $y = x$:



Gráfica de g(x) = cos x *Gráfica de $g^{-1}(x)$ = arc cosx*

Finalmente representemos la función arco tangente.

La función $h:(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ definida por $h(x) = \text{tg}\ x$ es biyectiva (por ser creciente y continua y por no estar acotada). Su función inversa h^{-1} se designa por arctg y se llama *función arco tangente*.

Así pues, la función arctg está definida en todo **R** y toma valores en $(-\pi/2, \pi/2)$. Además,

$$\text{arctgx} = y \quad \text{si y sólo si} \quad \text{tg}\, y = x.$$

Por ser $h(x) = \text{tgx}$ continua y creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $h^{-1}(x) = \text{arctg}\, x$ continua y creciente en **R**. Por ser $h(x) = \text{tgx}$ derivable y

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ en } (-\pi/2, \pi/2)$$

es $h^{-1}(x) = \text{arctgx}$ derivable en todo punto y

$$\text{arctg}'(x) = (h^{-1})'(x) = [h'(h^{-1}(x))]^{-1} = \frac{1}{1/(\cos^2(\text{arctgx}))}$$

y como

$$1 = \cos^2(\text{arctgx}) + \text{sen}^2(\text{arctgx}),$$

es

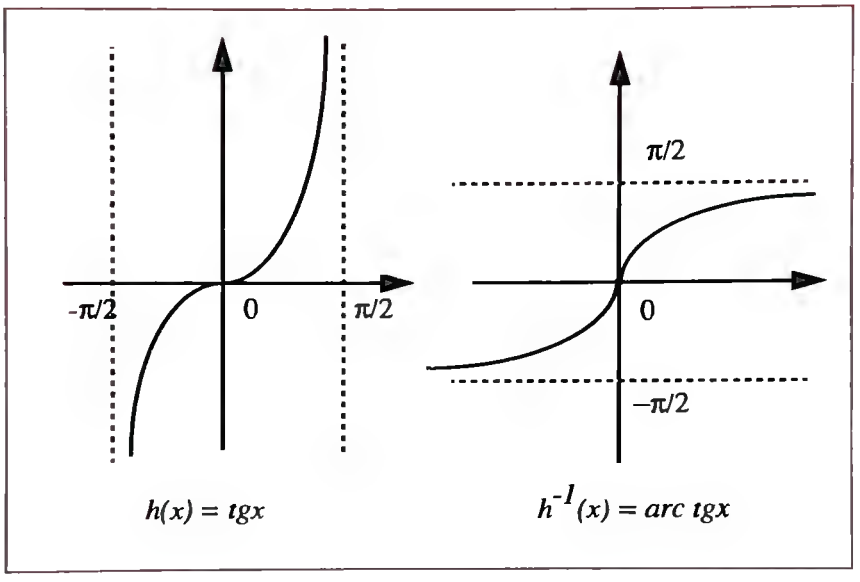
$$\frac{1}{\cos^2(\text{arctgx})} = 1 + [\text{tg}(\text{arctgx})]^2 = 1 + x^2$$

y, por tanto,

$$\text{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$.

Las gráficas de $h(x) = \text{tgx}$ y de $h^{-1}(x) = \text{arctgx}$ son simétricas respecto de la recta $y = x$:



26.6 Ejercicios

1.- Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}^3(4x)$,

b) $g(x) = \cos(\cos x)$,

c) $h(x) = \sqrt{x}\ \text{arctg}x$,

d) $u(x) = (1+\cos^2 x)^2$,

e) $v(x) = \sqrt[3]{\text{tg}\,(2x)}$,

f) $w(x) = \text{arcsen}\sqrt{1+x^2}$.

2.- Aplicar la regla de l´Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \text{arcsen}x}{x + \text{arctg}x}$,

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \text{sen}x}$,

c) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\text{sen}x} - \dfrac{1}{\text{tg}x}\right)$,

d) $\lim_{x \to 1} (1 - x) \text{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

3.- Estudiar la función

$$g(x) = \text{sen}x + \cos x$$

y dibujar su gráfica.

4. - Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x) = \text{arctg}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$$

en el intervalo [0,1].

5.- Utilizar las derivadas para probar que para todo $x \geq 1$ se cumple la igualdad

$$\text{arctg}\sqrt{x^2 - 1} + \text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

TEMA 27

Funciones logarítmicas y exponenciales

En este tema terminamos el estudio de las funciones elementales analizando en primer lugar la función logaritmo neperiano, así llamada en honor del matemático escocés John Neper (1550-1617).

La función logaritmo neperiano tiene derivada positiva en $(0, +\infty)$ luego es creciente y tiene por tanto, función inversa. Esta función inversa se llama exponencial natural.

Las demás funciones exponenciales y logarítmicas y la función potencia se definen a partir de la funciones logaritmo neperiano y exponencial natural y sus propiedades se deducen de las de estas últimas.

27.1 La función Logaritmo Neperiano

En el tema 30 veremos que existe una función derivable de $(0, \infty)$ en $\mathbf{R}$ cuya derivada en cada punto $x \in (0, +\infty)$ es $1/x$ y que se anula en $x = 1$. Esta función se llama *logaritmo neperiano* y se designa por log.

Así pues, la función *logaritmo neperiano* es la función $\log: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ que cumple

$$\log'(x) = 1/x \text{ para cada } x > 0 \text{ y } \log 1 = 0.$$

Por tener derivada positiva en $(0, +\infty)$, log es una función creciente en $(0,+\infty)$ y como $\log 1 = 0$, será $\log x > 0$ para $x > 1$ y $\log x < 0$ para $x < 1$.

Además, como

$$\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

log es una función cóncava en $(0, +\infty)$.

Cualesquiera que sean los números reales positivos x e y se verifica

$$\log(x.y) = \log x + \log y.$$

En efecto, para cada $y > 0$ la función $F : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(x) = \log(x\,y) - \log x - \log y$$

para cada $x > 0$, es derivable y

$$F'(x) = \frac{1}{xy}y - \frac{1}{x} = 0$$

para todo $x > 0$. Por consiguiente, F es una función constante, es decir, existe un número real c tal que

$$\log(xy) - \log x - \log y = c$$

para todo $x > 0$. En particular, para $x = 1$ será

$$\log y - \log(1) - \log y = c$$

luego $c = 0$ y, por tanto,

$$\log(xy) - \log x - \log y = 0$$

para todo $x > 0$.

Del resultado anterior se deducen otras propiedades de la función log:

a) Cualesquiera que sean los números reales positivos x e y se verifica

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

En efecto, $\log x = \log\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y$

b) Para todo $x > 0$ y para todo $n \in \mathbf{N}$ se cumple

$$\log x^n = n \log x.$$

Probaremos por inducción sobre n el resultado. Para $n = 1$ la igualdad se cumple evidentemente. Supongámosla cierta para n. Entonces también es cierta para $n + 1$ puesto que

$$\log x^{n+1} = \log(x^n x) = \log x^n + \log x = n \log x + \log x = (n + 1)\log x$$

c) La función log no está acotada superior ni inferiormente.

Para cada número natural n se verifican

$$\log 2^n = n \log 2 \quad \text{y} \quad \log(1/2^n) = -n \log 2$$

y como $\log 2 > 0$, para cualquier $k > 0$ se tiene

$$\log 2^n > k \quad \text{y} \quad \log \frac{1}{2^n} < -k \quad \text{cuando} \quad n > \frac{k}{\log 2}.$$

d) Se verifican

$$\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty .$$

Basta tener presente que log es creciente y que no está acotada superior ni inferiormente.

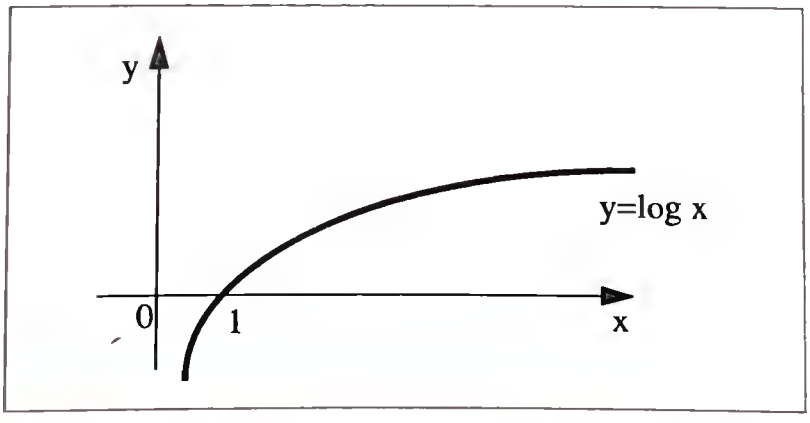
La función $\log:(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ es creciente, luego es inyectiva. Además es continua y no está acotada superior ni inferiormente, luego el conjunto

$$\{ \log x : x \in (0,+\infty) \}$$

es todo **R**. Con otras palabras, para cada número real y existe otro número real $x > 0$ tal que $\log x = y$, luego log es suprayectiva.

Por consiguiente, la función $\log: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ es biyectiva.

El estudio hecho en los párrafos anteriores permite dibujar con bastante precisión la gráfica de la función log



27.2 La función Exponencial Natural

Según hemos visto la función $\log: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ es biyectiva. Su función inversa $\log^{-1}: (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ se llama *función exponencial natural.*

La función $\exp = \log^{-1}$, inversa de la función logaritmo neperiano, se llama función *exponencial natural.*

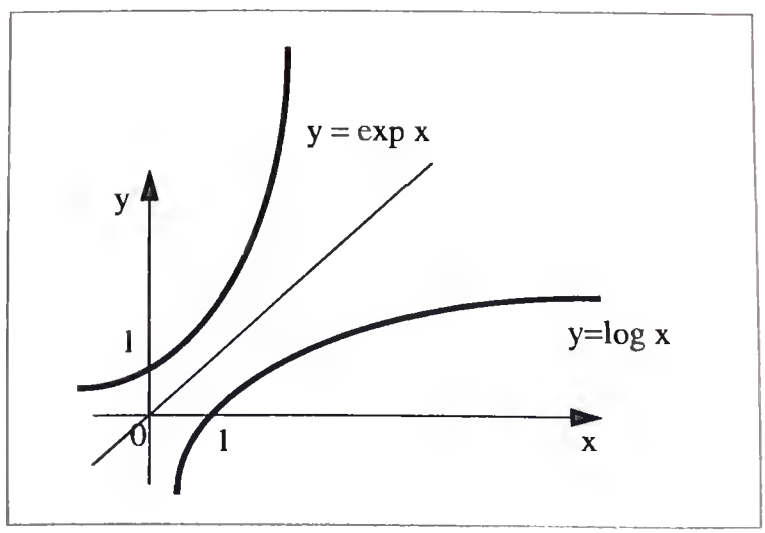
Según esto, las expresiones

$$\exp x = y\,, \qquad \log y = x$$

son equivalentes. Con otras palabras, un punto (x, y) pertenece a la gráfica de exp si y sólo si (y, x) pertenece a la gráfica de log. Esto significa que las gráficas de exp y log son simétricas respecto de la recta $y = x$.

El dominio de definición de exp es todo **R**. Su recorrido o conjunto imagen es el intervalo $(0, +\infty)$. Como la función logaritmo es creciente y continua, su función inversa, es decir, la exponencial es creciente y continua . Además por las propiedades del log se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$



La función exponencial es también derivable y su derivada se obtiene aplicando la regla de derivación de funciones inversas:

La función exponencial es derivable y

$$\exp'(x) = \exp x$$

para todo $x \in \mathbf{R}$.

Cualesquiera que sean los números reales x e y se verifica

$$\exp(x+y) = \exp x \,.\, \exp y$$

En efecto, pongamos $a = \exp x$ y $b = \exp y$. Entonces $x = \log a$, $y = \log b$, y por tanto

$$x+y = \log a + \log b = \log (ab)$$

luego

$$\exp (x+y) = a.b = \exp x \,.\, \exp y.$$

El número exp1 es uno de los números más importantes de la matemática.

Se designa por e al número real exp 1.

Esto equivale a decir que $\log e = 1$.

Del Teorema del valor medio aplicado a log en el intervalo [1, 2] se deduce que existe un número $c \in (1, 2)$ tal que

$$\frac{\log 2 - \log 1}{2 - 1} = \frac{1}{c}$$

es decir ,

$$\log 2 = \frac{1}{c}$$

y como $1/2 < 1/c < 1$, resulta $1/2 < \log 2 < 1$, y por tanto $\log 4 = 2\log 2 > >1$. Así pues, $\log 2 < 1 < \log 4$, o sea $\log 2 < \log e < \log 4$ y por consiguiente

$$2 < e < 4.$$

Se pueden obtener mejores aproximaciones de e . Su valor con seis cifras decimales es

$$e = 2{,}718281....$$

También se puede probar que e es un número irracional.

Además es fácil demostrar que

$$\exp r = e^r$$

para todo número racional r. En efecto, cualesquiera que sean los números reales x, y se tiene que

$$\exp(x + y) = \exp x \,.\, \exp y$$

y por inducción resulta que

$$\exp(nx) = (\exp x)^n$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ y todo $n \in \mathbf{N}$. Haciendo en esta fórmula $x = 1/n$ se tiene $e = (\exp(1/n))^n$, y por tanto

$$\exp(1/n) = e^{1/n}.$$

Haciendo ahora $x = 1/m$ con $m \in \mathbf{N}$ se deduce

$$\exp(n/m) = (\exp(1/m))^n = (e^{1/m})^n = e^{n/m}$$

luego

$$\exp r = e^r$$

para todo racional positivo r, y como

$$1 = \exp 0 = \exp(r - r) = \exp r \,.\, \exp(-r),$$

se verifica

$$\exp(-r) = 1/(\exp r) = e^{-r}$$

y la fórmula es también válida para los racionales negativos.

Para cada número real x designaremos por e^x el número real exp x

$$e^x = \exp x$$

Esta notación será la que se utilizará habitualmente para la exponencial natural.

27.3 Otras funciones exponenciales y logarítmicas

Sea $a > 0$. Para cada número real x se designa por a^x el número $e^{x\log a}$:

$$a^x = e^{x\log a}.$$

La función $f: \mathbf{R} \to (0,+\infty)$ definida por

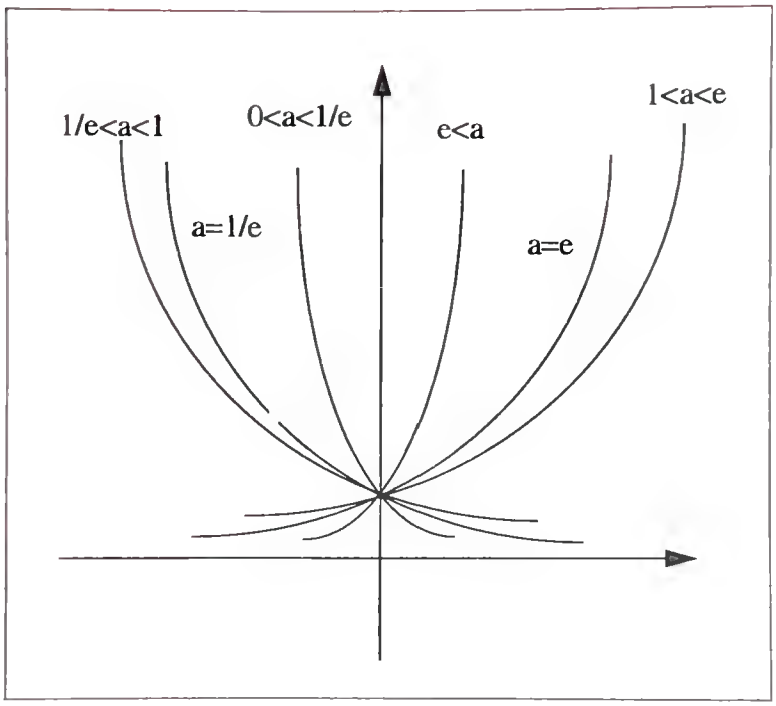
$$f(x) = a^x = e^{x\log a}$$

para cada $x \in \mathbf{R}$ se denomina *función exponencial de base* a

- Obsérvese que se necesita imponer la condición $a > 0$ para que exista log a. Obsérvese también que la exponencial natural es la función exponencial de base e.

Cada propiedad de la función exponencial natural se traduce inmediatamente en una propiedad de la función $f(x) = a^x$.

En la siguientefigura se pueden comparar las gráficas de las funciones exponenciales según los valores de a.



La función $f(x) = a^x$ es continua por ser f la función compuesta $g \circ h$ donde

$$g(x) = e^x \quad y \quad h(x) = x.\log a$$

y ser g y h continuas. Como g y h son también derivables, f es derivable y, por la Regla de la Cadena,

$$f'(x) = g'(h(x)).\, h'(x) = e^{h(x)} . \log a = e^{x \log a} . \log a = a^x . \log a$$

para todo $x \in \mathbf{R}$.

De la definición de la función a^x y del hecho de que las funciones exp y log son inversas se deducen otras propiedades importantes de la función exponencial en base a.

Sea $a > 0$. Cuales quiera que sean los números reales x e y se verifican

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$ la función $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$ es biyectiva. Su función inversa $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ se designa por $\log_a(x)$ y se denomina *función logaritmo en base* a.

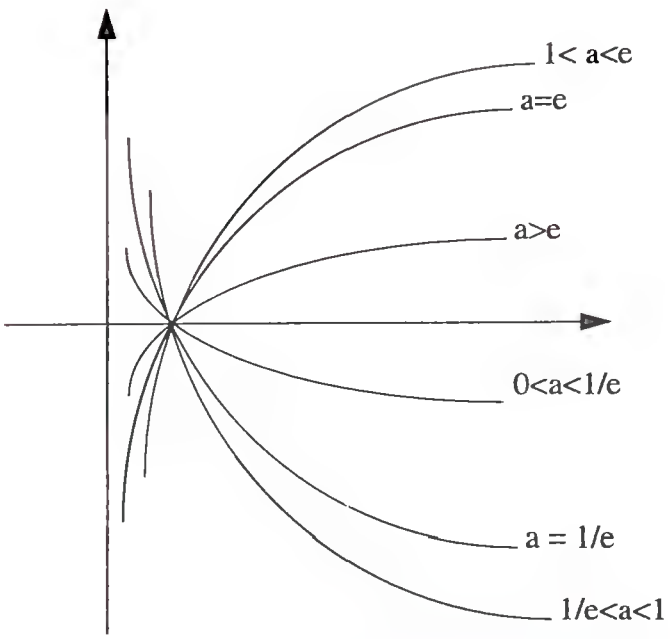
Según esto , si $y = \log_a x$ entonces $x = a^y = e^{y \log a}$ y tomando logritmos naturales se deduce

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Como $f(x) = a^x$ es continua y creciente si $a > 1$ (decreciente si $a < 1$) , $\log_a x$ es continua y creciente si $a > 1$ (decreciente si $a < 1$) . Además para el caso $a > 1$, $\log_a x$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a cero por la derecha y tiende a $+\infty$ si x tiende a $+\infty$. En el caso $a < 1$, $\log_a x$ tiende a $+\infty$ si x tiende a 0 por la derecha y a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

La derívada de $g(x) = \log_a x$ se obtiene inmediatamente teniendo en cuenta que $g(x) = (\log x)/(\log a)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x \log a} \text{ para todo } x > 0.$$



Gráfica de las funciones logaritmos en distintas bases

27.4 Función potencia

Dado un número real arbitrario a, la función f: $(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = x^a = e^{a\log x}$$

para cada $x > 0$ se llama *función potencia.*

Esta función es la función compuesta $g \circ h$ donde

$$g(x) = e^x \text{ y } h(x) = a \log x.$$

La continuidad y derivabilidad de $f(x) = x^a$ resultan de su definición como función compuesta de dos funciones derivables y mediante una aplicación sencilla de la Regla de la Cadena resulta

$$f'(x) = a\, x^{a-1}.$$

Si $a = 0$ entonces $f(x) = 1$ para todo $x > 0$.

Si $a > 0$ entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Además, como el límite de la función $a \log x$ en el cero por la derecha es $-\infty$ y el límite de $a \log x$ en $+\infty$ es $+\infty$ se tiene que

$$\lim_{x \to 0+} x^a = 0 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty .$$

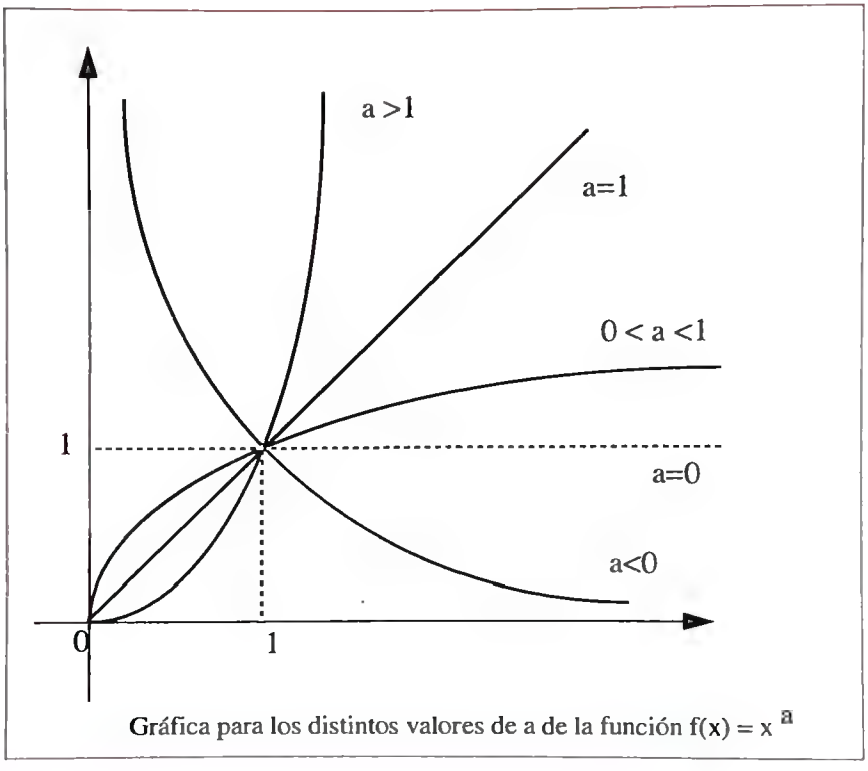
Si $a < 0$ entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente . Además como el límite de la función $a \log x$ en el cero por la derecha es $+\infty$ y el límite de la función $a \log x$ en $+\infty$ es $-\infty$ se tiene que

$$\lim_{x \to 0+} x^a = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} x^a = 0 \quad .$$

La segunda derivada de f(x) es

$$f''(x) = a\,(a-1)\, x^{a-2}.$$

Por tanto si $a < 0$ ó $a > 1$ la función es convexa y si $0 < a < 1$ la función es cóncava.



Gráfica para los distintos valores de a de la función $f(x) = x^a$

27.5 Cálculo de límites

Según vimos en 22.3 el límite de la suma, producto, y cociente de dos funciones f y g queda determinado salvo en los casos

$\infty - \infty$, $0 . \infty$, ∞ / ∞ y $a / 0$ donde a es un número real ó $+\infty$ ó $-\infty$.

Como para $f(x) > 0$ es

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

y la función exponencial es continua, el límite de $f(x)^{g(x)}$ quedará determinado cuando lo esté el del producto $g(x)\log f(x)$ y será

$$\lim f(x)^{g(x)} = \exp(\lim g(x)\log f(x)).$$

Ahora bien, este límite es indeterminado cuando uno de los factores tiende a 0 y el otro tiende a ∞, y como

$$\log f(x) \to \infty \text{ cuando } f(x) \to \infty$$

y

$$\log f(x) \to 0 \text{ cuando } f(x) \to 1,$$

el límite queda indeterminado cuando

$$f(x) \to 0 \quad \text{y} \quad g(x) \to 0,$$

cuando

$$f(x) \to \infty \quad \text{y} \quad g(x) \to 0$$

y cuando

$$f(x) \to 1 \quad \text{y} \quad g(x) \to \infty .$$

Así pues, las posibles indeterminaciones de $f(x)^{g(x)}$ son

$$0^0 \ , \ \infty^0 \ , 1^\infty .$$

En condiciones bastante generales la regla de l'Hôpital resuelve las indeterminaciones ∞ / ∞ y $0 / 0$.

La indeterminación $0.\infty$ puede reducirse a una de las dos anteriores poniendo

$$fg = \frac{f}{1/g} \text{ ó } fg = \frac{g}{1/f}.$$

La inderterminación $\infty - \infty$ puede tratarse también mediante trasformaciones algebraicas como, por ejemplo,

$$f - g = f(1 - g/f).$$

La indeterminación $a/0$ ($a \neq 0$) no suele ser difícil de eliminar, siendo suficiente estudiar el signo del denominador. Así, por ejemplo, si g tiende a 0 tomando valores positivos 1/g tiende a $+\infty$ y entonces f/g tiende a $a.(+\infty)$ con lo qué queda eliminada la indeterminación.

Las inderterminaciones

$$0^0 \ , \ \infty^0 \ , 1^\infty$$

se reducen todas a la del tipo $0.\infty$ sin más que tener en cuenta la definición

$$f^g = e^{g \log f}$$

En el cálculo de límites en el infinito o en cero a veces resulta muy útil hacer el cambio de variable $y = 1/x$. Con éste cambio,

$$y \to 0+ \quad \text{si y sólo si} \quad x \to +\infty$$

y

$$y \to 0- \quad \text{si y sólo si} \quad x \to -\infty.$$

27.5.1 Ejemplos

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1.$

Basta aplicar la regla de l´Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$

Basta aplicar la regla de l´ Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. $\lim_{x \to 0+} x \log x = 0.$

Haciendo el cambio de variable $y = 1/x$, cuando $x \to 0+$, $y \to +\infty$ y

$$\lim_{x \to 0+} x \log x = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

en virtud del resultado del ejemplo anterior.

4. $\lim_{x \to 0+} x^x = 1.$

Por definición, $x^x = \exp(x \log x)$ y como la exponencial es continua

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \exp\left(\lim_{x \to 0+} x \log x\right) = \exp(0) = 1.$$

5. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e.$

Por definición

$$(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+x)}$$

y como la función exponencial es continua,

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x \to 0} (1/x) \log (1+x) \right) = \exp(1) = e.$$

Este último resultado permite calcular fácilmente cualquier límite de la forma

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)}.$$

donde $-\infty \leq a \leq +\infty$ y f y g son funciones tales que

$f(x) \neq 1$ para todo x, $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ ó $-\infty$

para las que exista

$$\lim_{x \to a} (f(x) - 1)\, g(x).$$

En efecto, poniendo $h(x) = f(x) - 1$ se tiene

$$(f(x))^{g(x)} = [(1 + h(x))^{1/h(x)}]^{h(x)g(x)}$$

y como h(x) tiende a cero cuando x tiende hacia a,

$$\lim_{x \to a} [\, (1 + h(x))^{1/h(x)} \,] = \lim_{y \to 0} (1+y)^{1/y} = e.$$

Además,

$$h(x)g(x) = (f(x)-1)g(x)$$

y como la función exponencial es continua

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x \to a} (f(x) - 1)\, g(x) \right).$$

27.5.2 Ejemplos

1. $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \exp\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} x\right) = \exp(1) = e.$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2} = \exp\left(\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1\right) x^2\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2 + 1}\right)\right) = \exp(-2) = e^{-2}.$$

3. $$\lim_{x \to 0} (x^2 + x + 1)^{1/(x+1)} = \exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x + 1}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x \to 0} x\right) = \exp(0) = 1.$$

4. $$\lim_{x \to 0+} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x} = \exp\left(\lim_{x \to 0+} (\cos x - 1) \operatorname{ctg} x\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x \to 0+} \frac{(\cos x - 1)}{\operatorname{sen} x} \cos x\right)$$

y como

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(\cos x - 1)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0+} -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0+} \cos x = 1,$$

se tiene

$$\lim_{x \to 0+} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x} = \exp(0) = 1.$$

27.6 Tabla de derivadas

En el cuadro que sigue se resumen las reglas de derivación. En él , u y v designan dos funciones derivables y a es un número real arbitrario (positivo en el caso a^u). También se supone, en cada caso, que se cumplen las condiciones para la validez de la regla correspondiente. Por ejemplo, para la función log u se supone implícitamente que la función u toma valores positivos. Obsérvese también que las derivadas de cualquier raíz están incluidas en la regla $u^a \to a\, u^{a-1} u'$. Así, la función $\sqrt[n]{u}$ es $u^{1/n}$ y su derivada es $\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u'$.

Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
a	0	tg u	$\frac{u'}{\cos^2 u}$

27 Funciones logarítmicas y exponenciales

Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
au	au '	ctg u	$\frac{-u'}{sen^2 u}$
u + v	u ' + v'	arcsenu	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
u - v	u ' - v '	arc cos u	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
u . v	u 'v+u v '	arctg u	$\frac{u'}{1+u^2}$
u /v	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	log u	$\frac{u'}{u}$

Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
u^a	$au^{a-1}u'$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u}\log_a e$
sen u	u ' cos u	e^u	u ' e^u
cos u	-u 'sen u	a^u	u ' a^u loga

Veamos alguna aplicación de esta tabla.

27.6.1 Ejemplos

1. Para calcular la derivada de f(x) = arctg(senx), utilizamos la regla

$$\text{arctgu} \rightarrow \frac{u'}{1+u^2} \text{ con u = senx. Entonces } u' = \cos x \text{ y}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\text{sen}^2 x}.$$

2. La derivada de

$$f(x) = e^{\text{senx}+\cos x}$$

se calcula utilizando la regla

$$e^u \rightarrow u'.e^u$$

con $u = \text{senx} + \cos x$. Entonces $u' = \cos x - \text{senx}$ y

$$f'(x) = (\cos x - \text{senx}).e^{\text{senx}+\cos x}.$$

27.7 Ejercicios

1.- Resolver las siguientes ecuaciones :

a) $\log_{10} x = 3$,

b) $\log_x 4 = 2$,

c) $3 \log x - 4 \log 2 = 3 \log 3$,

d) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$.

2. - Resolver los sistemas formados por las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = \log(2y) + \log 2$, $\log(x^2) = 3\log y - \log(y^2)$,

b) $\log_{10} x + \log_{10} y = 3$, $x + y = 70$.

3. - Dibujar las gráficas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log(1 + x^2)$,

b) $g(x) = (\log x) / x$, $x > 0$,

c) $h(x) = x^2 e^{-x}$.

4. - Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1-} (\log x) \log (1 - x)$,

b) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{(2 - x) e^x - x - 2}{x^3} \right)$,

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$.

5.- Hallar el mínimo de la función $f(x) = e^x - x - 1$ y deducir que para todo $x \in \mathbf{R}$ se cumple

$$e^x \geq x + 1.$$

TEMA 28

Primitivas de una función

Se dice que una función F es una primitiva de otra función f en un intervalo I cuando F es derivable y $F' = f$ en I.

En este tema se exponen dos de los métodos de cálculo de primitivas , el de integración por partes que se basa en la regla de derivación de un producto de funciones y el de sustitución o cambio de variable , que se basa en la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas.

28.1 Primitivas de una función.

Dada una función f se quiere hallar una función F con la condición de que $F' = f$ (en un intervalo fijado I, aunque a veces será en toda la recta real). A la función F se la denomina *primitiva de f* .

Esta notación es un poco ambigua pues si una función tiene una primitiva entonces tiene infinitas primitivas pero afortunadamente se parecen todas, en efecto, si F y G son primitivas de f entonces $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, por lo que $F = G + k$ donde k es una constante.

Es decir para ser un poco rigurosos si una función f tiene una primitiva F entonces tiene un conjunto infinito de primitivas que sería

$$\{ F + k : \text{ donde k es un número} \},$$

pero por un abuso de lenguaje se denota por $\int f(x)\,dx = F + k$.

28 Primitivas de una función

Al conjunto de todas las primitivas de una función f se le denomina *integral indefinida de f.* Usualmente, este conjunto se denota por $\int f$ o por $\int f(x)\,dx$.

La igualdad $\int f(x)\,dx = F$ se cumplirá cuando $F' = f$.

El proceso de obtención de las primitivas de una función se le denomina integración de la función f.

Así, integrar una función f ó como se dice otras veces, calcular la integral indefinida de f, es el proceso inverso de la derivación.

Una función *elemental* es una función que puede expresarse en forma de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o composición de funciones polinómicas, trigonométricas, trigonométricas inversas, logaritmos y exponenciales.

Antes de seguir adelante, hemos de advertir que no siempre es posible encontrar primitivas que sean expresables mediante funciones elementales. Así por ejemplo la función $f(x) = e^{-x^2}$ no tiene primitivas expresables mediante funciones elementales. La demostración de este hecho es complicada. Como veremos más adelante toda función continua tiene primitiva pero no tiene porqué ser expresable en términos de funciones elementales como ocurre en el ejemplo anterior.

Algunas primitivas son fáciles de obtener. La función $f(x) = \text{sen } x$ tiene por primitiva $F(x) = -\cos x$ pues $(-\cos x)' = \text{sen } x$; la integral indefinida de la función $f(x) = 1 / x$ es, salvo constantes, $F(x) = \log x$.

Otras no lo son tanto, si $f(x)=1 / (\cos x)^6$ sus primitivas son

$$\int f(x)\,dx = tgx + 2\frac{tg^3x}{3} + \frac{tg^5x}{5} + k.$$

Las integrales del primer grupo se denominan *integrales inmediatas* y las del segundo serán el objeto de estudio de los métodos que veremos a continuación.

Las fórmulas para las siguientes integrales indefinidas se comprueban sin más que derivar los segundos miembros:

1. $\int a\,dx = ax + k$
2. $\int (x-a)^r dx = \frac{(x-a)^{r+1}}{r+1} + k$, si $r \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x-a} = \log\lvert x-a\rvert + k$
4. $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + k$ si $a \neq 0$
5. $\int a^{bx}\,dx = \frac{a^{bx}}{b\log a} + k$, si $a > 0$, $b \neq 0$, $a \neq 1$
6. $\int sen(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + k$ si $a \neq 0$
7. $\int \cos(ax)\,dx = \frac{sen(ax)}{a} + k$, si $a \neq 0$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}x + k$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + k$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + k$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + k$

Nota: En las anteriores fórmulas si sustituimos la variable x por u(x) y dx por u'(x)dx el resultado permanece cierto. Esto será el contenido básico del teorema del cambio de variable y es conveniente que el lector escriba la tabla anterior con esta formulación. La justificación de este cambio no es otro que la Regla de la cadena.

Otra consideración, de tipo sencillo, es que a partir de las fórmulas bien conocidas

$$(F+G)' = F' + G' \quad \text{y} \quad (aF)' = aF'$$

se obtienen las siguientes propiedades de las integrales indefinidas:

- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
- $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$
- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$,para todo a número real.

Antes de seguir adelante, hemos de advertir que, desafortunadamente, no es cierto que

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

como puede comprobar el lector derivando los dos miembros de la igualdad anterior.

28.2 Integracion por partes.

La fórmula de derivación del producto de dos funciones proporciona un método de integración que se conoce como integración por partes. En efecto,dado que

$$(f.g)' = f'.g + f.g',$$

entonces podemos escribir

$$f.g' = (f.g)' - f'.g$$

y tomando integrales en ambos miembros se tiene que

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int (f(x)\,g(x))'dx - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

y por la definición de primitiva se tiene

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx,$$

que es la **Fórmula de integración por partes.**

El método de integración por partes consiste en calcular una integral $\int h(x)\,dx$ expresando el integrando h(x) como producto de dos funciones f(x).g'(x), de forma que la integral que queda para resolver en la fórmula de integración por partes $\int f'(x)\,g(x)\,dx$ sea inmediata o al menos más fácil de resolver.

En los cálculos se suele proceder

$$f(x)=u \Rightarrow f'(x)\,dx = du$$

$$g'(x)\,dx = dv \Rightarrow g(x)=v$$

Con estos símbolos la fórmula de integración por partes resultaría

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

28.2.1 Ejemplos

1. $\int x\,\text{sen}x\,dx.$

Poniendo

$x=u \Rightarrow dx=du$

$\text{sen}x\,dx = dv \Rightarrow -\cos x = v$

resulta

$$\int x\,\text{sen}x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen}x + k$$

2. $\int \text{arcsen}x\,dx$.

Poniendo

$$\text{arcsen}x = u \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$$

$$1.dx = dv \Rightarrow x = v$$

se obtiene

$$\int \text{arcsen}x\,dx = x\ \text{arcsen}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\ \text{arcsen}x + \sqrt{1-x^2} + k$$

3. $\int x^2 e^x dx.$

Poniendo

$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$

$e^x\,dx = dv \Rightarrow e^x = v$

y aplicando la fórmula de la integración por partes, se tiene que

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx.$$

Para calcular esta última integral se vuelve a aplicar el método anterior poniendo

$x=u \Rightarrow dx = du$

$e^x\,dx = dv \Rightarrow e^x = v$

y nos queda

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

Por consiguiente

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$

Obsérvese que en este caso para resolver la integral indefinida ha habido que aplicar dos veces la fórmula de integración por partes.

4. Para $n = 2, 3, 4, \ldots$ se cumple

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x+1)^{n-1}}.$$

En efecto, como

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n},$$ aplicando el método de integración por partes a la ultima integral con

$$x = u\,, \quad \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = dv$$

$$dx = du\,, \quad \frac{-1}{2\,(n\text{-}1)\,(x^2+1)^{n-1}} = v$$

resulta

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{-x}{2\,(n\text{-}1)\,(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2\,(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\,.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2\,(n\text{-}1)\,(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\,.$$

Esta fórmula nos permite calcular la integral original sin más que aplicarla n-1 veces y tener en cuenta que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg}\, x + C.$$

Así, para $n = 3$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4\,(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x}{4\,(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2\,(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \right) =$$

$$= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C.$$

5. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Poniendo

$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\operatorname{sen} x\,dx = dv \Rightarrow -\cos x = v$

resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

y volviendo a aplicar el método

$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\cos x\,dx = dv \Rightarrow \operatorname{sen} x = v$

la última integral nos da

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \quad .$$

Por consiguiente

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \quad .$$

Pasando ahora al primer miembro la última integral se obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x),$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x).$$

Con esto hemos abtenido una primitiva de $e^x \operatorname{sen} x$. Añadiéndole una constante C obtenemos la forma general de todas las primitivas.

28.3 Integración por cambio de variable.

La Regla de la Cadena nos permite dar otro método de integración que se conoce como **Método de sustitución ó Cambio de variable.**

Supongamos que conocemos una primitiva F de una función f entonces se tiene que

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

En efecto, por hipótesis $F' = f$ y, por la Regla de la Cadena

$$[F(g(x)) + C]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Con la terminología tradicional se dice "haciendo el cambio de variable"

$$g(x) = t\,,\ g'(x)\,dx = dt$$

se pasa de la integral $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ a la integral $\int f(t)\,dt = F(t) + C$,

y deshaciendo el cambio se pasa de $F(t) + C$ a $F(g(x)) + C$.

Este proceso de cálculo suele escribirse así

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C$$

$$\{\, g(x) = t\,,\ g'(x)\,dx = dt\,\} = F(g(x)) + C.$$

De ahora en adelante dispondremos los cálculos de esta forma.

28.3.1 Ejemplos

1. $\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log|\log x| + C.$ Donde hemos realizado el cambio $\{\log x = t\,,\ \frac{dx}{x} = dt\}$.

2. $\int \frac{\cos(\text{arctg}x)}{1+x^2} dx = \int \cos t\ dt = \text{sen}\, t + C = \text{sen}(\text{arctg}x) + C$

mediante el cambio $\{\text{arctg}x = t\,,\ \frac{dx}{1+x^2} = dt\}$.

3. $\int \text{sen}^5 x \cos x\, dx =$ mediante el cambio $\{\text{sen}x = t\,,\ \cos x\, dx = dt\} =$

$= \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\text{sen}^6 x + C.$

4. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx =$ mediante el cambio $\{x^3 = t\,,\ 3x^2 dx = dt\} =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\text{arctg}\, t + C = \frac{1}{3}\text{arctg}\, x^3 + C.$

5. $\int x \cos x^2 dx =$ mediante el cambio $\{x^2 = t\,,\ 2x\, dx = dt\} =$

$= \frac{1}{2}\int \cos t\ dt = \frac{1}{2}\text{sen}\, t + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2) + C.$

$$6.\ \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \text{mediante el cambio } \{1\text{-}x^2 = t\,,\ -2xdx = dt\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C\,.$$

Obviamente, cuando se conoce una primitiva de la función $f(g(x))g'(x)$, se procede en sentido contrario al que hemos expuesto en el apartado anterior.

Si G es una primitiva de la función de la forma $(f_o\, g)g'$, donde g es una función que tiene inversa, entonces

$$\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x)) + C$$

En efecto, por la Regla de la Cadena se tiene que

$$[G(g^{-1}(x)) + C]' = G'(g^{-1}(x)).(g^{-1})'(x).$$

Pero por hipótesis es $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ y poniendo en esta igualdad $g^{-1}(x)$ en lugar de x resulta

$$G'(g^{-1}(x)) = f(g(g^{-1}(x))g'(g^{-1}(x)) = f(x).\ g'(g^{-1}(x)).$$

Por otra parte, la derivación de funciones inversas nos da

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Por consiguiente,

$$[G(g^{-1}(x)) + C]' = f(x)\ g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x).$$

En las condiciones anteriores podremos calcular la integral $\int f(x)\,dx$ "haciendo el cambio de variable"

$$\{x = g(t)\,,\, dx = g'(t)\,dt\}$$

con lo que nos queda

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(t) + C$$

y como $x = g(t)$, se tiene que $t = g^{-1}(x)$ y "deshaciendo el cambio" se llega finalmente a $G(g^{-1}(x)) + C$.

Como antes los cálculos se disponen de forma abreviada así:

$\int f(x)\,dx =$ mediante el cambio $\{x = g(t), dx = g'(t)\,dt\} =$

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(t) + C = G(g^{-1}(x)) + C.$$

28.3.2 Ejemplos

1. $\int \dfrac{dx}{x^2+4} =$ mediante el cambio $\{x = 2t, dx = 2dt\} =$

$$= \int \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctgt} + C = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}} =$ mediante el cambio $\{x = \sqrt{2}\,t\,,\, dx = \sqrt{2}dt\} =$

$$= \int \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{2t^2+2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C =$$

$$= \log\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}\right) + C.$$

3. $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx =$ mediante el cambio $\{ x = \text{sent}, dx = \text{cost}\,dt\} =$

$$= \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t}\,\text{costdt} = \int (\text{cost})^2 dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2t))\,dt =$$

$$= (t + \frac{1}{2}\text{sen}(2t)) + C = \frac{1}{2}(t + \text{sentcost}) + =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{arcsenx} + x\sqrt{1 - x^2}) + C.$$

4. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$ = mediante el cambio $\{ x = \text{tgt}, dx = (1 + \text{tg}^2 t)dt \} =$

$$= \int \text{costdt} = \text{sent} + C, \text{ y como}$$

$$\text{cost} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

se tiene

$$\text{sent} = \text{tgt} \cdot \text{cost} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

y por tanto,

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$$

Notas Históricas

La estrecha relación entre los conceptos de derivada e integral fue descubierta por dos gigantes del pensamiento: Newton (1643-1727) y Leibnitz (1646-1716). No está claro si la fundamentación del Cálculo Infinitesimal fue obtenida de forma independiente, aunque cada vez los historiadores de la Ciencia se inclinan más porque así fue. Tanto Newton como Leibnitz se atribuían el descubrimiento y hubo enormes polémicas entre los discípulos de ambos, conocedores de la importancia del Cálculo moderno.

Newton, por influencia de su maestro y amigo Barrow, conocía la relación entre el problema de las tangentes (Cálculo Diferencial) y la determinación de áreas (Cálculo Integral). De hecho fue de Barrow de quien Newton tomó el concepto de fluxión y de magnitudes que varían respecto del tiempo. En 1671 presenta Newton el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (Método de las magnitudes fluentes y de las series infinitas), pero el Gran Incendio de Londres de 1666 había destruido todas las imprentas por lo que el libro no fue editado hasta 1736, con posterioridad a la muerte de Newton, y con su contenido ya superado. Distingue Newton entre fluentes (variables) y fluxiones (derivadas). Evidentemente, al no disponer del concepto de límite Newton tenía una menor capacidad de cálculo, lo que no le impidió tener enormes éxitos.

Leibnitz, además de los trabajos de fundamentación, incorporó una notación que es la actual y que, sin duda, ha ayudado a la estructuración y claridad de la exposición del Cálculo Infinitesimal.

28.4 Ejercicios

1.- Calcular las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int e^{-x}\cos x\,dx$,

b) $\int \log(1+x^2)\,dx$,

c) $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$,

d) $\int x\sqrt{5-2x}\,dx$.

2.- Calcular las siguientes integrales mediante cambios de variable apropiados:

a) $\int x^3 \operatorname{tg}(x^4)\,dx$,

b) $\int \cos x \log \operatorname{sen}(x)\,dx$,

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$,

d) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3.- Calcular las siguientes integrales mediante los cambios de variable que se indican:

a) $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$, $x+1=2\operatorname{tg} t$,

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x=1/t$,

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$, $x+1=t^2$.

TEMA 29

Cálculo de primitivas

En este tema se exponen algunos métodos para el cálculo de primitivas de las funciones racionales y de algunas funciones trigonométricas.

29.1 Primitivas de las funciones racionales

Ya sabemos que una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , Q \neq 0$$

donde P y Q son funciones polinómicas. Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q y llamamos p y R al cociente y al resto de la división de P por Q, se tiene

$$P = p.Q + R,$$

y por tanto,

$$\frac{P}{Q} = p + \frac{R}{Q} \ ,$$

y el grado de R es menor que el grado de Q.

Por consiguiente,

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int p(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

La integral de p es inmediata pues si

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

se tiene

$$\int f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{Cte}.$$

Con esto, el problema de calcular la integral de f se reduce a calcular la integral

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

en la que el grado de R es menor que el grado de Q. Para ello, se descompone en fracciones simples la fracción R/Q.

En esta descomposición aparecen sumandos de las formas

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \text{ con } n \in N, \text{ y } \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^n}, \text{ con } n \in N, \text{ y } b^2 - c < 0.$$

Luego todo el problema se reduce a calcular las integrales de las fórmulas anteriores.

Las primeras no ofrecen ninguna dificultad pues son de dos tipos :

$$\int \frac{A}{(x-a)}\,dx = \log|x-a| + \text{Cte}$$

ó

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + \text{Cte}\,, \text{si}\ \ n \neq 1.$$

Para calcular las segundas se trasforma primero el numerador de forma que aparezca en él la derivada de $x^2 + 2bx + c$:

$$Bx + C = (B/2)(2x + 2b) + C - Bb.$$

Con esto se puede escribir

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2bx + c)^n}dx =$$

$$\frac{B}{2}\int \frac{(2x + 2b)}{(x^2 + 2bx + c)^n}dx + (C - Bb)\int \frac{dx}{(x^2 + 2bx + c)^n}\ .$$

Ahora bien,

$$\int \frac{(2x + 2b)\,dx}{(x^2 + 2bx + c)}dx = \log(x^2 + 2bx + c) + \text{Cte},$$

y

$$\int \frac{(2x + 2b)\,dx}{(x^2 + 2bx + c)^n}dx = \frac{-1}{(n-1)\,(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} + \text{Cte si}\ \ n \neq 1,$$

y sólo nos queda resolver la integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2bx + c)^n}.$$

En esta se completa en primer lugar el cuadrado de una suma con los términos x^2+2bx, sumando y restando b^2

$$x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + c - b^2,$$

y después se hace el cambio de variable

$$\{x+b=(\sqrt{c-b^2}\ t\ ), dx=\sqrt{c-b^2}dt\ \},$$

$$\int \frac{dx}{((x+b)^2+c-b^2)^n} = \sqrt{c-b^2}\int \frac{dt}{((c-b^2)t^2+c-b^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{(c-b^2)^{n-1/2}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

y esta integral se reduce integrando por partes según el ejemplo 4 de 28.2.

Obsérvese que de todo esto se deduce que cualquier función racional puede integrarse mediante funciones racionales, logaritmos y arcos tangentes.

29.1.1 Ejemplos

1. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}dx$.

Efectuando la división se tiene

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{6x-5}{x^2-5x+6}$$

y descomponiendo en fracciones simples la última fracción, resulta

$$\frac{6x-5}{x^2-5x+6} = \frac{-7}{x-2} + \frac{13}{x-3}.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}dx = \int dx - 7\int \frac{1}{x-2}dx + 13\int \frac{1}{x-3}dx =$$
$$= x - 7\log|x-2| + 13\log|x-3| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)^3}$.

Descomponiendo en fracciones simples se obtiene

$$\frac{1}{(x-2)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{(x-2)^2} +$$
$$+ \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(x+1)^3},$$

y por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{27}\cdot\log|x-2| - \frac{1}{27}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{27}\log|x+1| -$$
$$-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

Descomponiendo en fracciones simples resulta

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1},$$

y, por tanto,

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx.$$

Ahora bien,

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \log|x-1| + C.$$

Por otra parte,

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1},$$

y como

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \log(x^2+x+1) + C,$$

y

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \text{mediante el}$$

$$\text{cambio } \{x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctgt} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

nos queda

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

Como

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1,$$

se tiene

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \int \frac{dx}{((x+2)^2 + 1)^2},$$

y haciendo el cambio $\{x+2 = t, dx = dt\}$, resulta

$$\int \frac{dx}{((x+2)^2 + 1)^2} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}.$$

Aplicando la fórmula de reducción del ejemplo 4 de 28.2 con n = 2 se obtiene

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctgt} + C,$$

y deshaciendo el cambio, concluímos:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{x+2}{2((x+2)^2 + 1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

5. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$.

Como

$$x = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2,$$

se tiene

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{(x^2+4x+5)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}.$$

La primera de estas dos integrales es inmediata:

$$\int \frac{(2x+4)\,dx}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{1}{x^2+4x+5} + C.$$

La segunda la hemos calculado en el ejercicio anterior:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{x+2}{2\,((x+2)^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+4x+5)^2} = -\operatorname{arctg}(x+2) - \frac{2x+5}{2\,(x^2+4x+5)} + C.$$

6. $\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx.$

El denominador se descompone de la forma

$$x^3 - x = x\,(x-1)\,(x+1)$$

y

$$\frac{x+2}{(x+1)\,(x-1)\,x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x}.$$

Al operar, se obtiene

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)x} = \frac{ax(x-1)+bx(x+1)+c(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2+(b-a)x-c}{x(x-1)(x+1)},$$

de donde se obtiene un sistema de solución:

$$a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2} \text{ y } c=-2.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1| - 2\log|x| + C .$$

29.2 Primitivas de algunas funciones trigonométricas

En lo que sigue vamos a exponer algunos métodos para calcular integrales en las que aparecen potencias de las funciones sen x y cos x combinadas en forma de sumas, productos y cocientes.

Todas estas integrales se reducen a integrales de funciones racionales con el cambio

$$\{\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\,,\ x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx\ =\ \frac{2dt}{1+t^2}\ \}\,.$$

Con este cambio,

$$\mathrm{sen}x\ =\ \frac{2\mathrm{sen}\,(\frac{x}{2})\cos\,(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\mathrm{sen}^2(\frac{x}{2})}\ =\ \frac{2\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}\ =\ \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

y

$$\cos x\ =\ \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\mathrm{sen}^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\mathrm{sen}^2(\frac{x}{2})}\ =\ \frac{1-\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}\ =\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

29.2.1 Ejemplos

1. $\int\frac{dx}{\mathrm{sen}x}\,.$

Con el cambio anterior resulta

$$\int\frac{dx}{\mathrm{sen}x}\ =\ \int\left(\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)dt\ =\ \int\frac{dt}{t}\ =\ \log|t|+C\ =$$

$$=\log\left|\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})\right|+C.$$

2. $\int\frac{dx}{2+\mathrm{sen}x}\,.$

Con el cambio $\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})\ =\ t$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x} = \int \left(\frac{1}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \right) dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \text{mediante el cambio } \left\{ t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u \,,\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} u + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}} \right) + C \,.$$

- En algunos casos se pueden hacer otros cambios que reducen los cálculos:

a) Cuando el integrando es una función par en sen x y cos x, es decir cuando no se altera al cambiar simultáneamente senx por -senx y cosx por -cosx, es indicado el cambio de variable:

$$\left\{ \operatorname{tg}x = t,\, x = \operatorname{arctg}t,\, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\}.$$

Con ese cambio,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \,,$$

y

$$\operatorname{sen}x = (\operatorname{tg}x)\,(\cos x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

29.2.2 Ejemplo

$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

Con el cambio anterior resulta

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}\,dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 x - \log\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)\right) + C\,.$$

b) Cuando el integrando es impar en senx , es decir, cuando cambia de signo al cambiar senx por -senx, es indicado el cambio de variable

$$\{\cos x = t,\ -\operatorname{sen}x\,dx = dt\}.$$

29.2.3 Ejemplo

$\int \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos^4 x}\,dx.$

Esta integral, mediante el cambio descrito, será,

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C\,.$$

c) Cuando el integrando es impar en cosx , es decir , cuando cambia el signo al cambiar cosx por -cosx, es indicado el cambio de variable $\{\text{sen}x = t, \cos x\, dx = dt\}$.

29.2.4 Ejemplo

$$\int \cos^3 x dx.$$

Haciendo el cambio indicado

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \text{sen}^2 x)\cos x dx = \int (1 - t^2)\, dt =$$

$$= t - \frac{1}{3}t^3 + C = \text{sen}x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C .$$

• Otras veces resulta más cómodo utilizar alguna identidad trigonométrica para calcular la integral en cuestión.

29.2.5 Ejemplos

1. $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x dx.$

Como

$$\text{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}(2\text{sen}x\cos x)^2 = \frac{1}{4}\text{sen}^2(2x) =$$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)),$$

se tiene que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos(4x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C.$$

2. $\int \cos^4 x\,dx$.

Como

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}[1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}(1 + \cos(4x)) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x),$$

se tiene

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C.$$

29.3 Ejercicios.

1. - Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$,

b) $\int \frac{x^2 dx}{x+1}$,

c) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$,

d) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

2.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x+\cos x}$,

b) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$,

c) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx$,

d) $\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

TEMA 30

La integral definida

En este tema se define el concepto de área mediante un sistema de axiomas que lo caracterizan y se introduce el concepto de integral de una función, se estudia la relación existente entre la derivación y la integración y se aplica la integral al cálculo de áreas de recintos planos.

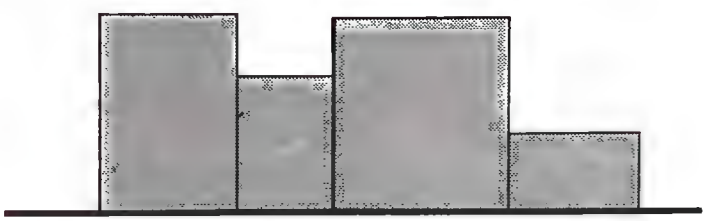
30.1 Definición axiomática de área

Muchos objetos matemáticos se definen enunciando un conjunto de propiedades que los caracterizan. Cada una de dichas propiedades suele llamarse *axioma* y se dice que el concepto en cuestión se ha definido axiomáticamente. De esta forma se define el concepto de área.

Cuando decimos que un recinto plano R tiene un área a(R) estamos haciendo corresponder el **número** a(R) al **conjunto** R de puntos del plano. Con otras palabras, el área es una función que asigna un número real a cada conjunto de una familia de conjuntos. Estos conjuntos, a los que se puede asignar un área, se llaman *conjuntos medibles*.

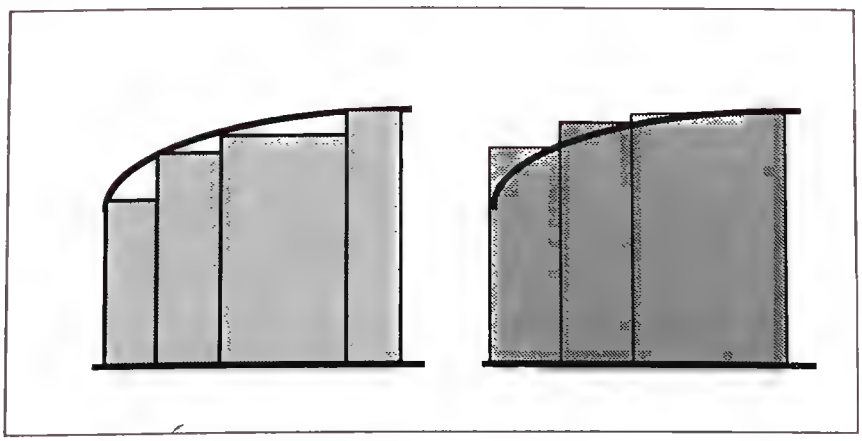
Uno de los axiomas de área establece que dos conjuntos *congruentes*, es decir, dos conjuntos que pueden hacerse coincidir mediante movimientos (traslaciones, giros, simetrías), han de tener la misma área.

Otro axioma establece que todo rectángulo es medible y que su área es el producto de las longitudes de sus lados. Uniendo rectángulos se pueden construir conjuntos medibles, como el de la figura siguiente, constituidos por una familia de rectángulos adyacentes con sus bases sobre el eje de abscisas y que se llaman *regiones escalonadas*.



Región escalonada

El último de los axiomas formaliza el **Método de exhaución**, empleado ya por los matemáticos griegos para calcular el área de recintos planos limitados por curvas y que consiste en aproximarlos por dentro y por fuera mediante regiones escalonadas cada vez más ajustadas al recinto en cuestión:



El *área* es una función definida sobre una familia M de conjuntos medibles, con las siguientes propiedades;

1. Para cada R de M se tiene que $a(R) \geq 0$.

2. Si R y S pertenecen a M entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también pertenecen a M, y además

$$a(R \cup S) = a(R) + a(S) - a(R \cap S).$$

3. Si R y S pertenecen a M y S está contenido en R entonces $R - S$ también pertenece a M y

$$a(R - S) = a(R) - a(S).$$

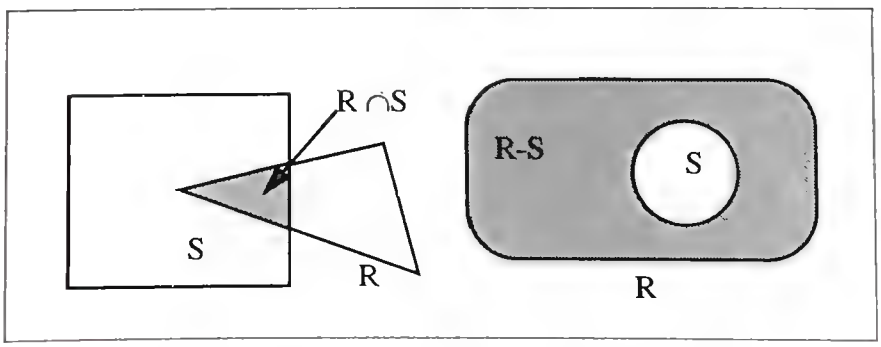
4. Si R pertenece a M y S es congruente con R entonces S también pertenece a M y $a(R) = a(S)$.

5. Todo rectángulo R pertenece a M y si sus lados tienen longitudes **a** y **h** entonces $a(R) = \mathbf{a.h.}$

6. Si R es un conjunto que se puede limitar entre dos regiones escalonadas y existe un único número real **c** que cumple

$$a(S) \leq \mathbf{c} \leq a(T)$$

para todo par de regiones escalonadas S y T tales que $T \supset R \supset S$, entonces R es medible y $a(R) = \mathbf{c}$.

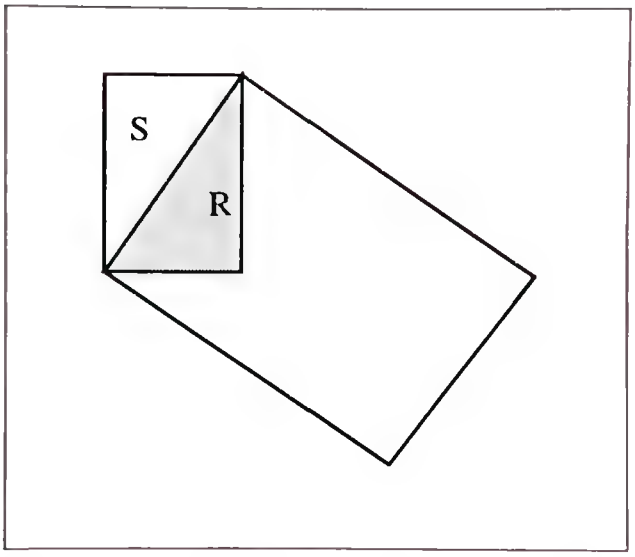


De estos axiomas se deducen otras propiedades del área. Así por ejemplo, haciendo S = R en el axioma 3 resulta que el conjunto vacío es medible y que $a(\varnothing) = 0$. Suponiendo ahora en el axioma 2 que R y S son disjuntos, es decir, que $R \cap S = \varnothing$, se deduce que, en este caso, $a(R \cup S) = a(R) + a(S)$. De los axiomas 3 y 1, en este orden , resulta que si R y S son medibles y S está contenido en R entonces $a(S) \leq a(R)$ ya que $a(R - S) \geq 0$.

También pueden deducirse de los axiomas algunas fórmulas para las áreas de figuras sencillas.Veamos, por ejemplo, cómo se prueba la

fórmula para el área de un triángulo:

Todo triángulo rectángulo R es una intersección de dos rectángulos y por los axiomas 5 y 2, todo triángulo rectángulo es medible.

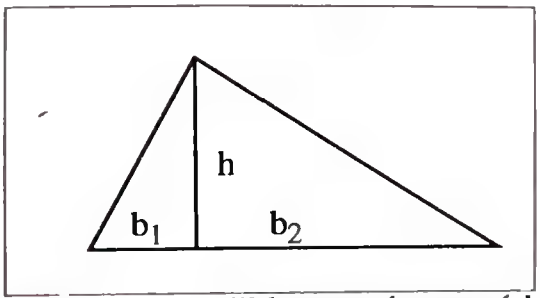


Además R es congruente con S luego a(R) = a(S) por el axioma 4 y como el rectángulo R ∪ S tiene por área b.h y R y S son disjuntos, se tiene

$$b.h = a(R \cup S) = a(R) + a(S) = 2a(R)$$

luego a(R) = **b.h/2.**

Ahora es fácil deducir la fórmula para cualquier triángulo. En efecto, todo triángulo es una unión de dos triángulos rectángulos



luego todo triángulo T es medible y su área será la suma de esos dos triángulos rectángulos, es decir,

$$a(T) = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)\, h}{2} = \frac{bh}{2}.$$

Los axiomas del área nos van a permitir calcular también áreas de recintos planos mucho más complicados en cuanto tengamos a nuestra disposición la herramienta necesaria: **la integral** .

30.2 La integral de las funciones escalonadas

Una función escalonada es una función constante a trozos. Para establecer este concepto con más precisión necesitamos definir previamente la noción de partición de un intervalo.

Una *partición* de un intervalo [a, b] es un conjunto finito de puntos

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \}.$$

Los subintervalos abiertos de [a, b] que determina la partición P,

$$(x_0, x_1),\ (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$$

se denominan *subintervalos de la partición P.*

Una función $s:[a, b] \to \mathbf{R}$ es *escalonada* cuando se puede encontrar una partición P de [a, b] tal que s es constante en cada uno de los subintervalos abiertos de la partición P.

Obsérvese que no se exige ninguna condición a los valores que toma s en los puntos de P.

Obsérvese también que si s es constante en cada uno de los subintervalos abiertos de P, y Q es otra partición de [a, b] con $Q \supset P$, entonces s es también constante en cada uno de los subintervalos abiertos de Q. Llamaremos *partición asociada a* s a cualquier partición con esta propiedad.

30.2.1 Ejemplo

La función $s:[1,4] \to \mathbf{R}$ definida por

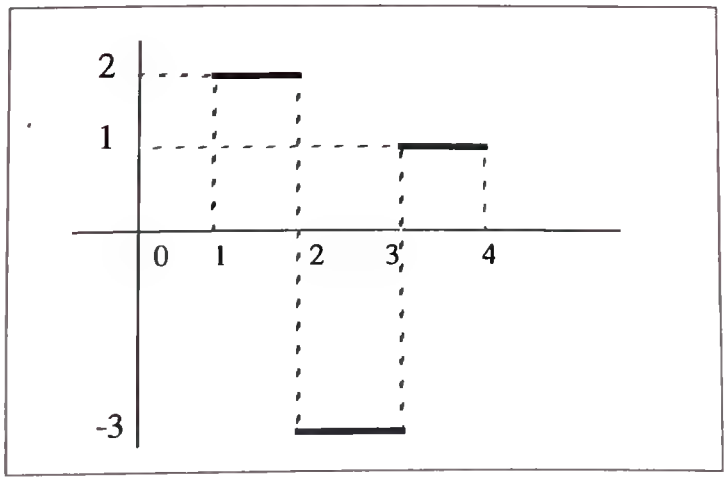
$s(x) = 2$ si $1 \leq x < 2$, $s(2) = 1$

$s(x) = -3$ si $2 < x \leq 3$, $s(x) = 1$ si $3 < x \leq 4$

es escalonada en [1, 4]. Una partición asociada a la función s(x) es

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$

puesto que s(x) toma un valor constante en cada uno de los subintervalos (1, 2), (2, 3) y (3, 4) de la partición P.



Es fácil comprobar que la suma s(x) + t(x) y el producto s(x).t(x) de dos funciones escalonadas s(x) y t(x) en [a, b] es también una función escalonada en [a, b]. En particular, como las funciones constantes son escalonadas, el producto de una constante por una función escalonada es una función escalonada.

Sea $s:[a, b] \to \mathbf{R}$ una función escalonada constante en cada uno de los subintervalos de la partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

y que toma el valor c_i en el subintervalo (x_{i-1}, x_i), entonces se llama *integral de la función s(x) en* [a, b] al número real

$$c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_1) + \ldots + c_n (x_n - x_{n-1})$$

y se representa por $\int_a^b s(x)\,dx$, o por $\int_a^b s$

30.2.2 Ejemplo

La integral en [1, 4] de la función escalonada s(x) definida en el ejemplo anterior es

$$\int_1^4 s(x)\,dx = 2(2-1) + (-3)(3-2) + 1(4-3) = 0$$

Observación: Si una función escalonada s es no negativa, su integral es el área de su recinto de ordenadas, que es una región escalonada.

30.2.3 Propiedades de la integral.

Dadas dos funciones escalonadas s(x), t(x) en [a, b] y k un número

real arbitrario se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t.$

2. $\int_a^b ks = k\int_a^b s.$

3. Si $s \leq t$ entonces $\int_a^b s \leq \int_a^b t.$

4. Si $a < c < b$ entonces $\int_a^b s = \int_a^c s + \int_c^b s.$

30.3 La integral de funciones acotadas.

Extendamos a funciones más generales, como por ejemplo la función senx, el concepto de integral; desafortunadamente el proceso nos obliga a que las funciones sean **acotadas.**

Sea pues f:[a, b]→**R** una función **acotada** , es decir, una función para la cual existen dos números reales m, M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces hay funciones escalonadas s(x) y t(x) en [a, b] que cumplen $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, por ejemplo, las funciones constantes $s(x) = m$ y $t(x) = M$, y por la tercera propiedad anterior será $\int_a^b s \leq \int_a^b t.$

Sea f:[a, b] → **R** una función acotada . Se dice que f es *integrable* en [a, b] cuando existe un **único** número real I tal que

$$\int_a^b s \le I \le \int_a^b t$$

para todo par de funciones escalonadas s y t tales que $s \le f \le t$. En este caso, dicho número real I se llama *integral de* **f** en [a, b] y se designa por

$$\int_a^b f \text{ ó } \int_a^b f(x)\,dx.$$

En esta definición hemos supuesto que $a < b$; si $b < a$ se define

$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ y si } a = b \text{ entonces } \int_a^b f = 0 .$$

Es importante no confundir los símbolos $\int f$ y $\int_a^b f$, puesto que el primero designa un conjunto de funciones mientras que el segundo es un número real. Para distinguir estos símbolos se denomina *integral indefinida* al primero e *integral definida* al segundo, aunque muchas veces se utiliza el término genérico integral para designar a ambos conceptos, siendo el contexto lo que determina si se trata de una u otra.

Una condición de integrabilidad equivalente a la de la definición y mucho más cómoda de manejar en las demostraciones es la siguiente:

Condición de integrabilidad Riemann

Una función $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ es integrable en [a, b] si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existen dos funciones escalonadas s y t tales que $s \leq f \leq t$ y

$$\int_a^b t - \int_a^b s < \varepsilon.$$

Con esta caracterización se pueden probar los siguientes resultados:

Si una función $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ es una función monótona entonces es integrable en [a, b].

Si una función $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ es continua entonces es integrable en [a, b].

Pero no todas las funciones acotadas son integrables como muestra el siguiente ejemplo.

30.3.1 Ejemplo

La función f definida mediante

$$f(x) = 1, \text{ si x es un número racional}$$

y

$$f(x) = 0, \text{ si x es un número irracional,}$$

no es integrable en ningún intervalo [a, b] pues si s y t son funciones escalonadas en [a, b] y $s \leq f \leq t$, han de cumplirse que $s \leq 0$ y $1 \leq t$ y por tanto ,

$$\int_a^b t - \int_a^b s \geq \int_a^b 1 - \int_a^b 0 \geq (b - a)$$

y para $\varepsilon < b - a$ no se cumple la condición de integrabilidad Riemann.

De la condición de integrabilidad Riemann y de las propiedades de la integral para las funciones escalonadas se deducen las propiedades de la integral de las funciones integrables.

30.3.2 Propiedades

Si f y g son dos funciones acotadas e integrables en [a, b] y k es un número real, las funciones f + g y kf son también integrables en [a, b] y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

2. $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.

3. Si $f \leq g$ entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

4. Si $a<c<b$ entonces $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

30.4 Teoremas Fundamentales del Cálculo

Los dos teoremas fundamentales del Cálculo establecen la estrecha relación existente entre los conceptos de derivada e integral. Aquí enunciaremos sólo el primero de ellos y, como consecuencia,deduciremos el segundo, que también se conoce como **Regla de Barrow**.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea f una función integrable en [a, b] y sea F la función definida, para cada $x \in [a, b]$, por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt .$$

Si f es continua en un punto $x \in [a, b]$ entonces F es derivable en x, y además

$$F'(x) = f(x).$$

30.4.1 Ejemplo

Como la función $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida para cada $t \in (0, +\infty)$ por $f(t) = 1 / t$ es continua, también es integrable en cualquier intervalo cerrado de la forma [a, b] contenido en $(0, +\infty)$, y por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

es derivable y

$$F'(x) = \frac{1}{x},$$

para todo $x \in (0, +\infty)$. Además

$$F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 \quad ,$$

luego F es la función *logaritmo neperiano* que hemos estudiado en el

tema 27.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.
Sea f una función continua en [a, b] y sea g una primitiva de f en [a, b]. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

En efecto, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de f en [a, b] y como g es otra, existe un número real C tal que $F(x) = g(x) + C$ y por tanto,

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a) = g(b) - g(a),$$

ya que $F(a) = 0$.

Una notación usual para representar la diferencia g(b) - g(a) es $g(x)\Big|_a^b$. Con esta notación, la igualdad del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se escribe

$$\int_a^b f = g(x)\Big|_a^b.$$

30.4.2 Ejemplos

$$1.\ \int_1^2 x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\ .$$

$$2.\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1\ .$$

$$3.\ \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

De los Teoremas Fundamentales se deducen las fórmulas de integración por partes y del cambio de variables para integrales definidas,

Fórmula de integración por partes.
Si f y g son funciones con primera derivada continua entonces

$$\int_a^b fg' = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

La demostración de este hecho es muy sencilla. En efecto, f(x)g(x) es una primitiva de f(x)g'(x) + f'(x)g(x), y por el Segundo Teorema,

$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = \int_a^b (fg' + f'g) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b$$

que demuestra la fórmula.

30.4.3 Ejemplo

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

Haciendo $x = u$, $e^x dx = dv$, $dx = du$, $e^x = v$, resulta

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Ahora vamos a enunciar el Teorema del Cambio de Variable para integrales definidas.

Cambio de Variable.

Sean f una función continua y g una función con primera derivada continua. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt.$$

Suele decirse que se pasa del primer miembro al segundo haciendo el cambio

$$\{ g(x) = t,\ g'(x)dx = dt \}$$

y, como para las integrales indefinidas, los cálculos suelen disponerse de manera abreviada así:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \text{mediante el cambio} \{ g(x) = t,\ g'(x)dx = dt \} =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt.$$

30.4.4 Ejemplo

$$\int_0^2 2xe^{x^2}dx = \text{mediante } \{x^2=t,\ 2xdx=dt,\ \text{si } x=0 \Rightarrow t=0,\ \text{si } x=2 \Rightarrow t=4\} =$$

$$= \int_0^4 e^t dt = e^t\Big|_0^4 = e^4 - 1.$$

Observación: Con la mismas hipótesis también se cumple la igualdad

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Aquí pasamos del primer al segundo miembro haciendo el cambio de variable $\{ x = g(t),\ dx = g'(t)dt \}$.

30.4.5 Ejemplo

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \text{mediante } \{x = \text{sent},\ dx = \text{costdt},\ x = 0 \Rightarrow \text{sent} = 0 \Rightarrow$$

$t=0,\ x=1 \Rightarrow \text{sent}=1 \Rightarrow t=\pi/2\} =$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\sqrt{1-\text{sen}^2 t}\ \text{costdt} = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2t)\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(4t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

30.5 La integral como área

Mediante la integral se pueden calcular las áreas de muchos recintos planos limitados por curvas. Empezaremos estableciendo que el área del recinto de ordenadas de una función integrable no negativa en un intervalo es igual a la integral de la función en dicho intervalo. Recordemos que el recinto de ordenadas de una función no negativa f en un intervalo [a, b] es el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de las x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Sea f una función no negativa e integrable en un intervalo [a, b]. Entonces su recinto de ordenadas R es medible y su área viene dada por

$$a(R) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

30.5.1 Ejemplo. Area de un círculo de radio r

La ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio r es $x^2+y^2=r^2$.

Despejando la variable y resultan las igualdades $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ que son las ecuaciones de las semicircunferencias situadas en los semiplanos $y \geq 0$ e $y \leq 0$, respectivamente.

Por el axioma 4, bastará con multiplicar por cuatro el área del primer

Por el axioma 4, bastará con multiplicar por cuatro el área del primer cuadrante que, según el enunciado anterior, será

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

luego el área del círculo es

$$4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \text{mediante el cambio } \{\, x = r\,\text{sent},\ dx = r\,\text{cost}\,dt,\ x = 0 \Rightarrow$$

$$\text{sent} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0, \quad x = r \quad \Rightarrow \quad \text{sent} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \pi/2\,\} \quad =$$

$$4r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\,\text{sen}^2 t}\,\text{cost}\,dt \quad =$$

$$= 4r^2 \int_0^{\pi/2} (\text{cost})^2\,dt \quad = \quad 2r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\,dt \quad =$$

$$= 2r^2 \left(t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2t)\right)\Big|_0^{\pi/2} \quad = \quad \pi r^2$$

También podemos calcular el área limitada por dos curvas,

Si f y g son dos funciones integrables en un interalo [a, b] y $f \leq g$ en [a, b] entonces el recinto S limitado por las gráficas de f y g y las rectas verticales x = a y x = b es un conjunto medible y su área viene dada por

$$a(S) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

30.5.2 Ejemplos. Area del recinto limitado por las gráficas de dos funciones

1. Tomemos las dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$.

Los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones se calculan resolviendo la ecuación $x^2 = x$, cuyas raíces son $x = 0$ y $x = 1$, y se tiene

$$a(S) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

2. Consideremos ahora la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$ y el eje de abscisas $y = 0$.

Como $f(x) = (x+1)x(x-1)$, entonces $f(x)$ se anula en los puntos -1, 0, 1; es positiva en el intervalo (-1,0), y negativa en el intervalo (0,1). El área de S será, por tanto,

$$a(S) = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ .$$

Notas Históricas

Duante el siglo XVIII la integración fué considerada la operación inversa de la derivación, sin duda por la enorme influencia de los trabajos de Newton, Leibnitz y Euler. Pero cuando Cauchy formalizó en 1821 el concepto de continuidad en el libro *Cours d´Analyse* y en 1823 el concepto de derivada en el libro *Leçons sur le Calcul infinitésimal*, comprobó que el concepto de área no exigía la derivabilidad, estando perfectamente definida en conjuntos con puntos angulosos e incluso con bordes discontinuos. Como consecuencia, Cauchy decidió volver al concepto de área como lo entendían los griegos y que es prácticamente

el que se usa en los textos elementales, pero su generalización necesitaba incluir la relación existente entre la derivada y la primitiva, lo que le llevó a establecer el Teorema de los Incrementos Finitos o Teorema del Valor Medio.

El año 1872 fue un año excepcional para el Análisis debido a la publicación de los trabajos de cinco excelentes matemáticos: Méray (1835-1911), Weierstrass (1831-1916), Heine (1821-1881), Cantor (1845-1918), y Dedekind (1831-1916), en los cuales se ocupaban de las series infinitas y de la definición correcta de número real, núcleo central de la aparición de objetos matemáticos de difícil comprensión en la época, como la curva de Bolzano, que era continua en todo punto y no diferenciable en ninguno.

Riemann, a su vez, había encontrado una función f(x) discontinua en infinitos puntos de un intervalo pero que era integrable y definía una función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ continua pero sin derivada en los puntos de discontinuidad de f.

A principios del siglo XX se propusieron varias generalizaciones del concepto de integral, la más famosa la integral de Lebesgue (1875-1941), en las que se eliminaba la necesidad de la continuidad en la misma definición, lo que supuso un enorme avance en el desarrollo del Cálculo Integral.

30.6 Ejercicios

1.- Calcular las siguientes integrales mediante la fórmula de integración por partes:

a) $\int_1^2 \log x\,dx$,

b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$,

c) $\int_0^1 \text{arctg}\, x\, dx$,

d) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$.

2.- Calcular las siguientes integrales mediante cambios de variable apropiados:

a) $\int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x} dx$,

b) $\int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x \cos^3 x\, dx$,

c) $\int_0^{\pi/4} \text{tg}^3 x\, dx$,

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

3.- Hallar el área de los recintos limitados por las funciones dadas en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = \text{sen}\, x$, en $[0, 1/2]$,

b) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \text{sen}\, x$, en $[0, \pi/4]$,

c) $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 2$, en $[0, 2\pi]$.

Indice

Abscisa, 256
Angulo, 223
Aplicación, 53
  biyectiva, 59
  compuesta, 60
  identidad, 54
  inversa, 61
  invertible, 61
  inyectiva, 57
  sobreyectiva, 58
Area, 597
Argumento, 305
Asíntota horizontal, 511
  oblícua, 513
  vertical, 510
Base, 23
  ortonormal, 287
Cambio de Variable, 572
Cardinal, 45
Circunferencia, 225
Cociente, 5
Coeficiente, 133
  de variación, 127
Combinación, 79
  con repetición, 84
Complemento, 50
Composición, 419
Conjunto, 39
  complementario, 50
  de partes, 45
  final, 56
  finito, 45
  inicial, 56
  medible, 595
  universal, 44
  vacio, 43
Contenido, 42
Coordenada, 256
  cartesiana, 335
Cosecante, 240
Coseno, 239
Cotangente, 240
Denominador, 9
Derivada, 477
  sucesiva, 489
Desviación
  media, 121
  típica, 122
Determinante, 166
Diagonal principal, 155
Diagrama de Venn, 42
Dimensión, 331
Dirección
  de una recta, 336
  de un plano, 363
Distancia
  de un punto a una recta, 350
  de un punto a un plano, 386
  entre dos puntos , 383
Dividendo, 5
Divisor, 3
  común, 6
  máximo común, 6
Ecuación, 85

de un plano, 366
de una recta, 337
de segundo grado, 30
exponencial, 35
lineal, 27
logaritmica, 34
Eje de coordenadas, 255
Elemento, 39
Elipse, 354
Entorno abierto, 22
Espacio
muestral, 98
vectorial, 329
Exponencial, 544
Exponente, 23
Expresión decimal, 12
Factor, 3
Factorización Canónica, 8
Focos, 355
Forma
binómica, 295
trigonométrica, 305
Fracción, 9
exacta, 12
irreducible, 10
periódica pura, 12
peródica mixta, 12
simple, 442
Frecuencia
absoluta, 116
relativa, 118
Función, 56
arco coseno, 535
arco seno, 533
arco tangente, 536
cociente, 420
cóncava, 506
continua, 466
convexa, 506
coseno, 521
cotangente, 530
derivable, 477
diferencia, 420
elemental, 564
escalonada, 599
exponencial, 544
factorial, 72
identidad, 422
impar, 427
inversa, 422
lineal, 419
monótona, 424
negativa, 423
par, 426
periódica, 519
polinómica, 437
positiva, 423
potencia, 551
probabilidad, 101
producto, 420
racional, 441
seno, 521
suma, 420
tangente, 529

Hipérbola, 355
Imagen, 55
Inecuación lineal, 27
Incógnita, 133
Integración por partes, 567
Integral
  definida, 603
  indefinida, 564
Intersección, 49
Intervalo
  abierto, 21
  cerrado, 22
Inversa, 55
Ley de los Grandes Números, 105
Límite, 399
  de función, 449
  infinito, 405
Logaritmo, 33
  neperiano, 541
Matriz, 153
  ampliada, 147
  cero, 155
  columna, 154
  complementaria, 170
  cuadrada, 154
  de coeficientes, 147
  diagonal, 154
  fila, 154
  opuesta, 158
  producto, 161
  rectangular, 154
  simétrica, 154
  traspuesta, 163
  triangular, 154
  unidad, 155
Máximo, 493
Media aritmética, 120
Mediana, 120
Menor complementario, 170
  de una matriz, 198
Método de Gauss, 142
Mínimo, 493
Moda, 120
Módulo, 272
Muestra, 98
Múltiplo, 3
  mínimo común, 9
Numerador, 9
Número
  combinatorio, 79
  complejo, 294
  compuesto, 7
  conjugado, 296
  e, 401
  entero, 1
  imaginario puro, 294
  impar, 3
  natural, 1
  par, 3
  primo, 7
  π, 225
  racional, 9
  real, 16

Orden de un determinante, 198
Ordenada, 256
Origen de coordenadas, 255
Parábola, 357
Parámetro estadístico, 120
Parte imaginaria, 294
Partición, 599
Permutación, 77
  con repetición, 82
Planos
  paralelos, 370
  perpendiculares, 386
  secantes, 371
Población estadística, 115
Polinomio, 429
Potencia, 23
Primitiva, 563
Principio de adición, 64
Principio de multiplicación, 66
Probabilidad, 101
  condicional, 107
Producto
  cartesiano, 52
  escalar, 280
  vectorial, 323
Puntos
  alineados, 365
  incidentes, 364
  de inflexión, 509
Raíz, 24
  cuadrada, 24
  cúbica, 24
  compleja, 437
  múltiple, 438
Rango de una matriz, 198
Rectas, 335
  incidentes, 364
  coplanarias, 381
  paralelas, 219
  perpendiculares, 226
  secantes, 344
Regla
  de Barrow, 605
  de Cramer, 192
  de la Cadena, 486
  de l´ Hopital, 501
  del paralelogramo, 275
Resolver una ecuación, 27
Resolver una inecuación, 27
Resto, 5
Secante, 240
Segmento, 221
Semirrecta, 22
Seno, 239
Sistema
  compatible, 137
  de ecuaciones, 135
  equivalente, 137
  generador, 286
  homogéneo, 205
  incompatible, 137
Solución, 85
Subconjunto, 42
Submatriz, 197

Sucesión, 391
  acotada, 398
  alternada, 397
  convergente, 400
  monótona, 397
  positiva, 396
Suceso, 98
  contrario, 98
  imposible, 98
  incompatible, 98
  independiente, 111
  seguro, 98
Tangente, 240
Teorema
  de Bolzano, 471
  del Binomio de Newton, 92
  Fundamental del Algebra, 439
  Fundamental del Cálculo, 606
  de Pitágoras, 233
  de Rolle, 497
  de Rouché-Froebenius, 205
  de Tales, 230
  del valor medio, 498
  de los valores intermedios, 470
  de Weierstrass, 472
Término independiente, 133
Triángulo, 227
  rectángulo, 233
Unión, 48
Valor absoluto, 4
Variable, 27
  dependiente, 414
  estadística, 115
  independiente, 56
Variación, 69
  con repetición, 74
Varianza, 121
Vector
  fijo, 267
  libre, 270
  opuesto, 273
  ortogonal, 281
  suma, 274
  unitario, 286

Vectores
  colineal, 282
  equivalente, 268
  linealmente independiente, 283

$\mathbf{N}$	1
$\mathbf{Z}$	2
$b > a$	3
$b \geq a$	3
$a \mid b$	3
$\lvert n \rvert$	4
m.c.d.(a, b)	6
m.c.m.(a, b)	8
$\mathbf{Q}$	9
$\mathbf{R}$	16
(a, b)	21
[a, b]	22
$\log_a n$	33
$x \in A$	40
$B \supset A$	42
$\varnothing$	43
P(A)	45
$A \cup B$	48
$A \cap B$	49
$A \times B$	52
$\mathbf{R}^2$	53
$f : A \to B$	54
f(a)	54
f(X)	55
$g \circ f$	60
Id_A	61
$\lvert S \rvert$	64
V(n, r)	73
VR(n, r)	75
P(n)	78
$\binom{n}{r}$	79
C(n, r)	79
$P(m)^{m_1 m_2 \ldots m_k}$	83
P(A)	101
$f_n(A)$	105
P(A / B)	107
$\sum_1^n$	116
$< x >$	120
DM	121
σ^2	121
σ	122
CV	127
(a_{ij})	154
A^t	163
$\lvert A \rvert$	166
A^{-1}	179
A^+	190
rang(A)	199
PQ	221
π	225
senγ	239
cosγ	239
tgγ	240
cotgγ	240
secγ	240
cosecγ	240

Ox	255
Oy	255
AB	267
$\mathbf{v} = (a, b)$	270
$\|\mathbf{v}\|$	272
$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$	278
$i = \sqrt{-1}$	293
$\mathbf{C}$	294
Re(z)	294
Im(z)	294
$\|z\|$	296
$\bar{z}$	296
arg z	306
V x W	320
r ∥ s	341
d(A, B)	346
d(C, r)	350
E_3	361
D(r)	363
D(π)	363
d(C, π)	387
$\{a_n\}$	392
$\lim_{n \to \infty} c_n$	392
e	401
Gráfica de f	416
Grad(P)	430
$\lim_{x \to a} f(x)$	449
$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	456
f' (a)	477
arcsenx	533
arccosx	535
arctgx	537
$\int f(x)\,dx$	563
a(**R**)	595
$\int_a^b f(x)\,dx$	601

1787
Amparo
JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23